PVK Lineare Algebra HS19

Folgendes Skript entstand für den Prüfungsvorbereitungskurs für die Herbstsemester 2019 Vorlesung "Lineare Algebra" von Dr. Vasile Gradinaru. Die enthaltene Theorie basiert auf ebendieser Vorlesung und viele weiterführende Beispiele entstammen aus dem Skript von Gioele Zardini, welches ebenfalls auf meiner Webseite www.n.ethz.ch/~michbaum unter dem Reiter "Assistenz" zu finden ist. Im Folgenden werden auch immer wieder Verweise auf weitere Beispiele aus diesem Skript gemacht, welche man im Selbststudium lösen kann und soll. Ich kann keine Garantie auf Korrektheit und Vollständigkeit des Skriptes geben, und bin überaus froh für jegliche Meldung allfälliger Fehler, addressiert diese bitte direkt an michbaum@student.ethz.ch. Ich werde die aktuellste Version des Skriptes immer auf meine Webseite laden. Am Ende des Skriptes finden sich zwei alte Prüfungen aus der Vorlesung und mein ausführlicher Lösungsvorschlag dazu. Auch dort kann ich keine Garantie für

Korrektheit geben, zumindest alle Rechenaufgaben wurden aber mittels Matlab kontrolliert. Weitere, nicht ganz so ausführliche, Lösungen, darunter auch die zu den neusten beiden Prüfungen findet ihr auf meiner Webseite. Ganz am Ende findet ihr noch generelle Tipps für die Lernphase. Ich hoffe sehr, dass euch das Skript bei der Bewältigung eurer Prüfung behilflich sein kann und freue mich über jegliches Feedback!

Ich wünsche viel Spass bei der Lektüre

Michael

Versionskontrolle:

Version	Änderungen	Datum
1.0	Erste Fassung PVK-Skript	08.12.2018
2.0	Zweite Fassung, Anpassungen und Korrekturen für den Übungsbetrieb 2019. Korrektur Beispiel Hurwitz-Kriterium.	17.12.2019

Inhaltsverzeichnis

- Gaussverfahren 3
- Matrizen 5
- Transponierte 7
- Gauss-Jordan-Algorithmus (Matrixinverse) 8
- LR-Zerlegung 9
- Orthogonale Matrizen 13
- Givensrotation 15
- QR-Zerlegung mit Givensmatrizen 17
- Housholdertransformation 20
- QR-Zerlegung mit Housholdermatrizen 21
- Vektorräume 23
- Untervektorräume 23
- Linearkombination, Erzeugendensystem, lineare Unabhängigkeit und Basis 24
- Dimension 26
- Basis in einem Funktionsraum 26
- Kern / Bild & Basis von Kern / Bild 26
- Koordinaten in einer bestimmten Basis 28
- Koordinatentransformation und Basiswechsel 30
- Lineare Abbildungen 34
- Isomorphismus / Automorphismus 34
- Abbildungsmatrizen 35

- Kommutative Diagramme 35
- Koordinatenabbildung 36
- Abbildungsmatrix bei einer Koordinatentransformation 38
- Verkettung linearer Operationen 39
- Die verallgemeinerte Norm 40
- Das verallgemeinerte Skalarprodukt 40
- Die Orthogonalprojektion 40
- Die Orthonormalbasis 42
- Das Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren 42
- Die Ausgleichsrechnung 43
- Die Determinante 44
- Das Eigenwertproblem 45
- Diagonalisierbarkeit 46
- Anwendungen des Eigenwertproblemes 47
  - $\underline{\underline{A}}^k \underline{x}$
  - $e^{\underline{\underline{A}}}$
- Differentialgleichungssysteme 48
- Definitheit 49
- Singulärwertzerlegung (SVD) 51
- Ausgleichsrechnung mit der SVD 51
- Anmerkungen 52
- Prüfungen mit Lösungsvorschlag 53 & 78
- Tipps für die Lernphase 94

○ Gaussverfahren: Skript S. 7 (Verweise auf Zardinis Skript)

Eines der üblichsten Lösungsverfahren für LGS.

- **Ziel:** LGS auf ZSF bringen und anschliessend durch Rückwärtseinsetzen lösen.

- **Erlaubte Operationen:**
  - Vertauschen von Zeilen oder Spalten
  - Vielfaches einer Zeile/Spalte zu einer anderen Zeile/Spalte addieren.

- **Mögliche Lösungen:**
  - Eindeutige Lösung
  - Unendlich viele Lösungen
  - Keine Lösung

Beispiel 1: (eindeutige Lösung)

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 2 \end{aligned}\right|$$

Lösung $\Rightarrow$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Wir schreiben:

$$\begin{array}{c|ccc|c} (\mathrm{I}) & 1 & 1 & 2 & 4 \\ (\mathrm{II}) & 2 & 0 & 1 & 0 \\ (\mathrm{III}) & 1 & 1 & 3 & 2 \end{array}$$

⚠ Wir lassen $\underline{x}$ weg und "merken" uns vorerst einmal, dass jede Spalte mit einer Variabel korrespondiert!

$$\xrightarrow[\text{III}-1\cdot\text{I}]{\text{II}-2\cdot\text{I}}\quad \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}$$

⚠ Die Operationen werden beidseitig angewendet!

$\Rightarrow$ Kein weiterer Schritt notwendig!

Wir erhalten nun eigentlich folgendes LGS:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 0 - 2x_2 - 3x_3 &= -8 \\ 0 + 0 + x_3 &= -2 \end{aligned}$$

Nun ist auch klar, was mit Rückwärtseinsetzen gemeint ist $\rightsquigarrow$ wir finden sehr leicht:

$$\underline{\underline{x_3 = -2}}\,,\quad \underline{\underline{x_2 = 7}}\,,\quad \underline{\underline{x_1 = 1}}$$

Nachfolgend ein Beispiel mit unendlich vielen Lösungen, wo wir sehen, wie man typischerweise <u>Lösungsmengen</u> von LGS oder ganz generell darstellt.

Beispiel 2: $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$ $\qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 6 & 2 \end{array} \xrightarrow[\text{III}-2\text{I}]{\text{II}-2\text{I}} \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{array} \xrightarrow{\text{III}-2\text{II}} \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \end{array}$$

⚠ Wir haben die Bedingung $0 \cdot x_3 = 0$, was nun? Das ist ja <u>immer</u> erfüllt $\Rightarrow$ Wir führen einen Parameter für x_3 ein $\rightsquigarrow$ $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$ (beliebig!)

$\Rightarrow x_3 = t \;,\; x_2 = 1-2t \;,\; x_1 = 3t-2$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{ \begin{bmatrix} 3t-2 \\ 1-2t \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}}}$$

Aufgaben

Serie 1 Aufgabe 5 & Skript Beispiel 3
Sowie als Teil diverser andere Aufgaben!

o Matrizen: Skript S. 17 ff.

Eine vollständige Zusammenstellung der Definition und Eigenschaften aller Matrizentypen findet ihr im Dokument "Matrizeneigenschaften", welches ihr ebenfalls auf meiner Webseite unter dem Reiter "Assistenz" bei Woche 1 findet.
(Konkret umfasst das Dokument die Transponierte, die Inverse sowie Orthogonale und Symmetrische Matrizen sowie all deren Eigenschaften & Rechenregeln)

o Rechnen mit Matrizen: Skript S. 18 f

- Addition ($A^{m \times n} + B^{m \times n} = C^{m \times n}$):

Man addiert Elementweise:

⚠ Alle Matrizen müssen dieselbe Dimension haben!

Beispiel 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 10 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 7 & 13 \\ 4 & 10 & 16 \end{bmatrix}}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \text{NICHT DEFINIERT!}$$

- **Skalarmultiplikation** ($\alpha \cdot A^{m \times n} = C^{m \times n}$):

Man multipliziert mit allen Elementen:

Beispiel 4:

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

- **Matrixmultiplikation**: ($A^{m \times n} \cdot B^{n \times p} = C^{m \times p}$)

Wir bilden das "Skalarprodukt" (definieren wir etwas später genauer) der Zeilenvektoren von A und der Spaltenvektoren von B. Das Ergebnis schreiben wir in die mit A korrespondierende Zeile und mit B korrespondierende Spalte.

Beispiel 5:

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{a_{11} \quad a_{12}} \\ a_{21} \quad a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & \boxed{a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 + 4 \cdot 0 & 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 6 & 13 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{3} \cdot 2\left\{ \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \right. = \text{NICHT DEFINIERT}$$

⚠ Klassisches Matrix-Vektorprodukt:

$$\begin{bmatrix}2 & 3\\4 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot1+3\cdot2\\4\cdot1+5\cdot2\end{bmatrix}=\underline{\underline{\begin{bmatrix}8\\14\end{bmatrix}}}$$

⚠ $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}=$ NICHT DEFINIERT!

Das "klassische" Skalarprodukt aus der Schule ist korrekterweise:

$$\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}=3+2\cdot4=11 \iff \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}^{\textcircled{T}}\cdot\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$$

Aufgaben

Serie 2 A.2 & Skript Beispiele 19-22

- Transponierte einer Matrix: Skript S. 18

Eigenschaften und Definition finden sich im Dokument "Matrizeneigenschaften".

↳ Im Prinzip einfach eine Spiegelung der Matrix (oder auch Vektors) an der Hauptdiagonalen.

Beispiel 6:

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}3 & 5\end{bmatrix}$$

Aufgaben

Serie 2 A.4 & Skript Beispiele 17 & 18

◦ Matrixinverse: Skript S. 20

Eigenschaften und Definition finden sich im Dokument "Matrizeneigenschaften"

- Gauss-Jordan-Algorithmus: (Kochrezept)

Wir schreiben die zu invertierende Matrix A und die Einheitsmatrix I_n nebeneinander und wenden das Gaussverfahren an, bis wir aus A die Einheitsmatrix gemacht haben:

$$A \mid I_n \Rightarrow I_n \mid A^{-1}$$

⚠ Hierfür müssen wir das Gaussverfahren etwas erweitern:

(i) Normal ZSF erreichen

(ii) Jede Zeile durch ihr Pivot teilen (beidseitig!)

↳ Erhalten so 1 auf der Diagonalen.

(iii) Gaussverfahren <u>nach oben</u> anwenden

Beispiel 7:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{III}-7\text{I}]{\text{II}-4\text{I}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -13 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{III}-2\text{II}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} :1 \\ :-3 \\ :-1 \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{I}-3\text{III}]{\text{II}-2\text{III}}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 4 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{3} & -\frac{13}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array} \xrightarrow{I-2II} \begin{array}{c|c} \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} & \underbrace{\begin{array}{ccc} -\frac{8}{3} & \frac{8}{3} & -1 \\ \frac{10}{3} & -\frac{13}{3} & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{array}}_{\underline{\underline{A}}^{-1}} \end{array}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -8 & 8 & -3 \\ 10 & -13 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}}}$$

Aufgaben

Serie 3 A.2 & Skript Beispiel 23

- **Die LR-Zerlegung ($P \cdot A = L \cdot R$):** Skript S.24

↳ Eine Alternative zur Berechnung der Lösungen eines LGS, nützlich falls man $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$ für mehrere $\underline{b}$ lösen muss/möchte.

Kochrezept:

Es sei $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$ gegeben.

(i) Man schreibt zwei Einheitsmatrizen und A nebeneinander: $[I_n], [I_n], [A]$, wobei diese Matrizen mit P, L, R korrespondieren werden?

(ii) Man wendet auf A das Gaussverfahren wie bekannt an, bis man die ZSF erreicht hat,

<u>ABER</u>:

- Man wählt die Koeffizienten, mit welchen die Pivotzeilen multipliziert werden müssen <u>immer</u> bezüglich der <u>Subtraktion</u>
$\leadsto$ z.B. $\mathrm{II} + 2 \cdot \mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{II} - (-2)\mathrm{I}$ schreiben.
- Falls man Zeilen- oder Spaltenvertauschungen durchführen muss, macht man sie mit dem 1. I_n mit.

(iii)
- Die in ZSF gebrachte Matrix A ist bereits R!
- Die in (ii) benützten Koeffizienten trägt man an jeweiliger Stelle in die 2. Einheitsmatrix ein und erhält so schlussendlich L.
- Die (vertauschte) 1. Einheitsmatrix ist die <u>Permutationsmatrix</u> P.

(iv) Man löst:
- Zuerst $\underline{\underline{L}}\,\underline{c} = \underline{\underline{P}}\,\underline{b}$ mit Vorwärtseinsetzen und findet so $\underline{c}$.
- Anschliessend $\underline{\underline{R}}\,\underline{x} = \underline{c}$ mit Rückwärtseinsetzen und findet somit unsere Lösungsmenge $\underline{x}$.

Bemerkung: Die 2. Einheitsmatrix kann man auch erst am Ende aufbauen, oder aber ganz weglassen und L <u>in</u> R aufbauen, dies ist für die Handrechnung aber weniger übersichtlich

Beispiel 8:

Finde $\underline{\underline{L}}, \underline{\underline{R}}, \underline{\underline{P}}$ so, dass $\underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{B}}$ gilt und löse anschliessend $\underline{\underline{B}}\,\underline{x} = \underline{b}$:

$$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -3 & 7 & 6 \\ -3 & -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -62 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -3 & 7 & 6 \\ -3 & -2 & -2 \end{bmatrix}}_{R} \quad \xrightarrow{\text{II} \Leftrightarrow \text{I}}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \\ -3 & -2 & -2 \end{bmatrix} \quad \xrightarrow[\text{II} - 0 \cdot \text{I}]{\text{III} - \boxed{(+1)}\,\text{I}}$$

(da 1. Elem. bereits 0)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -9 & -8 \end{bmatrix} \quad \xrightarrow{\text{III} - (-9) \cdot \text{II}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -9 & 1 \end{bmatrix}}_{L}, \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -35 \end{bmatrix}}_{R}$$

$\Rightarrow$ Lösen jetzt $\underline{\underline{L}} \cdot \underline{c} = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{b} \Leftrightarrow \underline{\underline{L}}\,\underline{c} = \underline{b}'$:

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\0\\-62\end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix}0\\3\\-62\end{bmatrix}} = \underline{b}'$$

$$\text{Gauss}\quad \begin{array}{c ccc|c} & 1&0&0&0\\ \Rightarrow & 0&1&0&3\\ & 1&-9&1&-62\end{array} \quad \xrightarrow{\text{vorwärtseinsetzen}} \quad \left.\begin{array}{l} c_1=0\\ c_2=3\\ c_3=-35\end{array}\right\} \underline{c} = \underline{\begin{bmatrix}0\\3\\-35\end{bmatrix}}$$

$\Rightarrow$ Nun $\underline{\underline{R}}\,\underline{x} = \underline{c}$:

$$\text{Gauss}\quad \begin{array}{c ccc|c} & -3&7&6&0\\ \Rightarrow & 0&1&-3&3\\ & 0&0&-35&-35\end{array} \quad \xrightarrow{\text{rückwärtseinsetzen}} \quad \left.\begin{array}{l} x_3=1\\ x_2=6\\ x_1=16\end{array}\right\} \underline{x} = \underline{\underline{\begin{bmatrix}16\\6\\1\end{bmatrix}}}$$

Nun kann man die Stärke der LR-Zerlegung erkennen, für ein anderes $\underline{b}$ muss man nur eine Multiplikation mit P vollführen & einmal vorwärts- & einmal rückwärtseinsetzen!

Aufgaben

Serie 2 A.3 & Serie 3 A.1 sowie im Skript Beispiele 26 - 28

o Orthogonale Matrizen & Vektoren: Skript S. 22

Zur Beschreibung von Orthogonalität und auch Länge benötigen wir Normen und Skalarprodukte. Anfangs betrachten wir die bereits bekannte euklidische Norm und das Skalarprodukt.

- Die euklidische Norm eines Vektors bezeichnet dessen Länge im $\mathbb{R}^n$, man schreibt hierfür $\|\underline{b}\|_2$, meist abgekürzt zu $\|\underline{b}\|$.

  $\|\cdot\|_2$ ist definiert als:

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \rightsquigarrow \|b\|_2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Beispiel 9:

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \|b\|_2 = \sqrt{2 + 9 + 25} = \sqrt{36} = \underline{\underline{6}}$$

- Das Skalarprodukt gibt uns Auskunft darüber, ob 2 Vektoren orthogonal zueinander stehen. Man schreibt $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$ für das Skalarprodukt der Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$. Gilt $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = 0$, so stehen die beiden Vektoren gemäss diesem Skalarprodukt senkrecht aufeinander.

  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist definiert als: $\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ $\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$

$$\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \underline{a}^T \cdot \underline{b} = [a_1 \ \ a_2] \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Beispiel 10: $\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 + 6 = \underline{\underline{8}} \rightsquigarrow \text{nicht orthogonal}$$

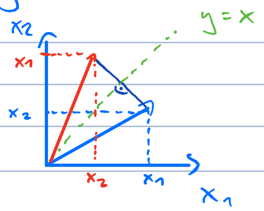
$$\langle \underline{a}, \underline{c} \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = -2 + 2 = \underline{\underline{0}} \rightsquigarrow \text{orthogonal}$$

Eigenschaften und Definition orthogonaler Matrizen & Vektoren findn sich in "Matrizeneigenschaften".

⚠ Es heisst zwar orthogonale Matrix, dies ist aber historisch bedingt, die Spalten (und Zeilen?!) der Matrix stehen jedoch orthonormal aufeinander (also haben sie alle Länge 1!).

Beispiel 11: $\underline{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ beschreibt eine Spiegelung an der Geraden $y = x$

$$\Rightarrow \quad \underline{Q} \cdot \underline{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}}} \quad \Rightarrow$$



- Orth. Matrizen mit Determinante $= -1 \;\hat{=}\;$ Drehspiegelung
- Orth. Matrizen mit Determinante $= 1 \;=\;$ Drehung

Beispiele sind Givensrotationsmatrizen und Housholdermatrizen, welche wir genauer betrachten. (Die Determinante betrachten wir gegen Ende des Skripts)

Aufgaben

Serie 4 A. 2 & 3

○ Givensrotation: Skript S. 22

Beschreibt eine Rotation (meist im mathematisch positiven Sinn <=> Gegenuhrzeigersinn) in einer, von 2 Koordinatenachsen aufgespannten, Ebene.

Wir müssen mehrere Feinheiten unterscheiden, um Verwirrung zu vermeiden:

- Die Givensrotation lässt sich durch eine orthogonale Matrix de Form

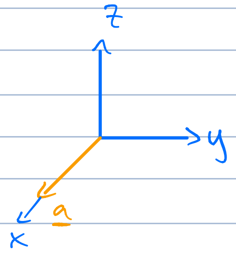
$$\underline{\underline{G}}(i,k,\theta) = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \ddots & c & \cdots & s & \cdots & 0 \\ 0 & & & \vdots & 1 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & -s & \cdots & c & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cccccccc} & & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & & i & & k & & \end{array} & \end{array}$$

  beschreiben, wobei $c = \cos(\theta)$ und $s = \sin(\theta)$ in der i-ten und k-ten Zeile und Spalte erscheinen. Eine solche Matrix heisst Givens-Matrix und sie beschreibt eine Drehung im mathematisch positiven Sinn in derjenigen Ebene, welche von dem i-ten und k-ten Koordinatenvektor aufgespannt wird.

  ⚠ Es gibt eine Ausnahme zur Regel, liegen die gewählten Koordinatenvektoren unmittelbar nebeneinander (sprich sie bilden ein "Päckchen"), so ist das (−) oben rechts statt unten links anzubringen, um eine Drehung in math. pos. Richtung zu erzielen. -> Für G.R. egal!

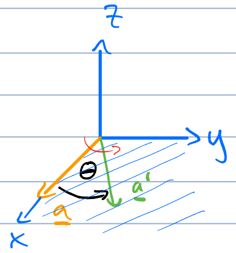
Beispiel 12: G. R. in $\mathbb{R}^3$

$\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$



(i) Drehung in der xy-Ebene um θ:

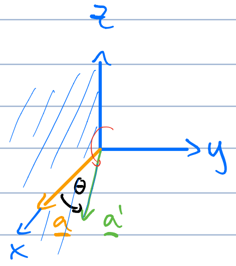
$$\underline{\underline{G}}(1,2,\theta) = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \quad\uparrow & \quad\uparrow \\ x & \quad y & \quad z \end{matrix} \end{array} \rightsquigarrow$$



$$\Rightarrow \underline{a}' = \underline{\underline{G}}(1,2,\theta) \cdot \underline{a} = \begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

(ii) Drehung in der xz-Ebene um θ:

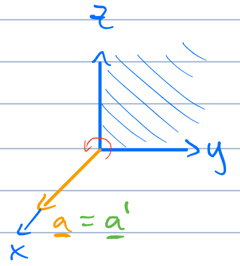
$$\underline{\underline{G}}(1,3,\theta) = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \quad\uparrow & \quad\uparrow \\ x & \quad y & \quad z \end{matrix} \end{array} \rightsquigarrow$$



$$\Rightarrow \underline{a}' = \underline{\underline{G}}(1,3,\theta) \cdot \underline{a} = \begin{bmatrix} c & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ -\sin\theta \end{bmatrix}}}$$

(ii) Drehung in der yz-Ebene um θ:

$$\underline{\underline{G}}(2,3,\theta) = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \quad\uparrow & \quad\uparrow \\ x & \quad y & \quad z \end{matrix} \end{array} \rightsquigarrow$$



$$\Rightarrow \underline{a}' = \underline{\underline{G}}(2,3,\theta) \cdot \underline{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

$\rightsquigarrow$ Logischerweise keine Änderung, da bereits auf der x-Achse!

o QR-Zerlegung mittels Givens-Rotation: –

Ein stabiles Verfahren zur Bildung der ZSF, somit für numerische Anwendungen dem Gauss-Verfahren klar vorzuziehen.

Kochrezept:

(i) Möchte ZSF erreichen → analog zu Gauss, jedoch mit neuen Operationen

(ii) Will man den Eintrag an der Matrixposition (i,j) zu null transformieren, so setzt man

$$c = \frac{a_{jj}}{p}, \quad s = \frac{a_{ij}}{p} \quad \text{mit} \quad p = \operatorname{sgn}(a_{ii}) \sqrt{a_{jj}^2 + a_{ij}^2}$$

wobei sgn := Signum einfach das Vorzeichen des jeweiligen Koeffizienten zurückgibt.

⚠ Grosse Verwirrungsgefahr bei der Bezeichnung einer Givens Matrix: $\underline{\underline{G}}_{1,2}$:= Eliminiert a_{21}!

(iii) Man bildet $\underline{\underline{Q}} = (\underline{\underline{G}}_n \cdot \underline{\underline{G}}_{n-1} \cdot \ldots \cdot \underline{\underline{G}}_2 \cdot \underline{\underline{G}}_1)^T$ und erhält $\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{A}}$, wobei $\underline{\underline{G}}_1$ die este Givens-Matrix, $\underline{\underline{G}}_2$ die zweite usw. ist.

(Warum muss man die Transponierte bilden?

↳ $\underline{\underline{G}}$ ist orthogonal ⇒ $\underline{\underline{G}}_n \cdot \underline{\underline{G}}_{n-1} \cdot \ldots \cdot \underline{\underline{G}}_1$ ist orthogonal

⇒ $(\underline{\underline{G}}_n \cdot \ldots \cdot \underline{\underline{G}}_1)^T = (\underline{\underline{G}}_n \cdot \ldots \cdot \underline{\underline{G}}_1)^{-1} = \underline{\underline{Q}}$, ebenfalls orthogonal

⇒ Wir wissen, dass $\underline{\underline{G}}_n \cdot \underline{\underline{G}}_{n-1} \cdot \ldots \cdot \underline{\underline{G}}_1 \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{R}}$ aus (ii)

⇒ $\underline{\underline{A}} = (\underline{\underline{G}}_n \cdot \ldots \cdot \underline{\underline{G}}_1)^{-1} \underline{\underline{R}} = (\underline{\underline{G}}_n \cdot \ldots \cdot \underline{\underline{G}}_1)^T \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{R}}$)

⚠ Es gibt eine gute Alternative zu (ii), die vor allem für die Handrechnung an der Prüfung passend ist, und zwar:
Will man den Eintrag an der Matrixposition (i,j) zu null transformieren, so setzt man

$$G = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \cos\varphi & \cdots & \sin\varphi & \\ & \vdots & 1 & \vdots & \\ & -\sin\varphi & \cdots & \cos\varphi & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \leftarrow i\text{te Zeile} \\ \\ \leftarrow j\text{te Zeile} \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ i\text{te Spalte} & j\text{te Spalte} \end{array} & \end{array}$$

Dann berechnet man einfach $G \cdot A$ und setzt das Element an Matrixposition (i,j) gleich 0. So findet man (für einfache Aufgaben auch ohne Taschenrechner) die benötigten Drehwinkel (⚠ 2 Lösungen?) Den Winkel kann man anschliessend einfach einsetzen und so erhält man G, A und $G \cdot A = R$

Beispiel 13:
$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ \boxed{-1} & 4 \end{bmatrix}$$

(i) Müssen $\boxed{a_{21}}$ eliminieren.

(ii) $p = \operatorname{sgn}(a_{ii})\sqrt{a_{jj}^2 + a_{ij}^2} = \operatorname{sgn}(a_{22})\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2} = +\sqrt{1+1} = \underline{\sqrt{2}}$

$$c = \frac{a_{jj}}{p} = \frac{a_{11}}{\sqrt{2}} = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}, \quad s = \frac{a_{ij}}{p} = \frac{a_{21}}{\sqrt{2}} = \underline{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{G}}_{1,2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{G}}_{1,2} \cdot \underline{\underline{A}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}}} = \underline{\underline{R}} \qquad \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{G}}_{1,2}^{T} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}}$$

(Alternative)

$$G = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad G \cdot A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\varphi - \sin\varphi & 3\cos\varphi + 4\sin\varphi \\ \underset{=0}{\boxed{-\sin\varphi - \cos\varphi}} & -3\sin\varphi + 4\cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad -\sin\varphi - \cos\varphi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin\varphi = -\cos\varphi$$

$\Rightarrow \varphi = 135°$ <u>oder</u> $\underline{315°}$ (beides richtig?!)

$$\Rightarrow \quad \sin 315° = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \quad \cos 315° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

einsetzen

$$\Rightarrow \quad G_{1,2} = \underline{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}, \quad G \cdot A = R = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{7}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}}}$$

$$\text{(iii)} \quad \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{G}}_{1,2}^{T} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{R}}$$

Wie ihr seht liefern beide Methoden dasselbe!

Bemerkung: Bräuchte man mehr Eliminationsschritte, so müsste man die jeweiligen Givens-Matrizen einfach mit dem bereits veränderten $\underline{\underline{A}}'$ berechnen und von links anfügen.

Aufgaben

Serie 4 A. 4

o Housholdertransformation (Spiegelung):

Beschreibt die Spiegelung eines Vektors an einer Hyperebene durch Null im euklidischen Raum. Im dreidimensionalen Raum ist sie somit eine Spiegelung an einer Ebene durch den Ursprung. Die Darstellungsmatrix dieser linearen Abbildung nennt man Householder-Matrix.

Die Spiegel-Hyperebene kann durch einen Normalvektor $\underline{v}$, also einen Vektor, der orthogonal zur Hyperebene ist, definiert werden. Ist $\underline{v}$ als Spaltenvektor gegeben und I_n die n-dimensionale Einheitsmatrix, dann wird die oben beschriebene lineare Abbildung durch die folgende Matrix dargestellt:

$$\boxed{\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{I_n}} - \frac{2}{\underline{v}^T\underline{v}}\underline{v}\underline{v}^T}$$

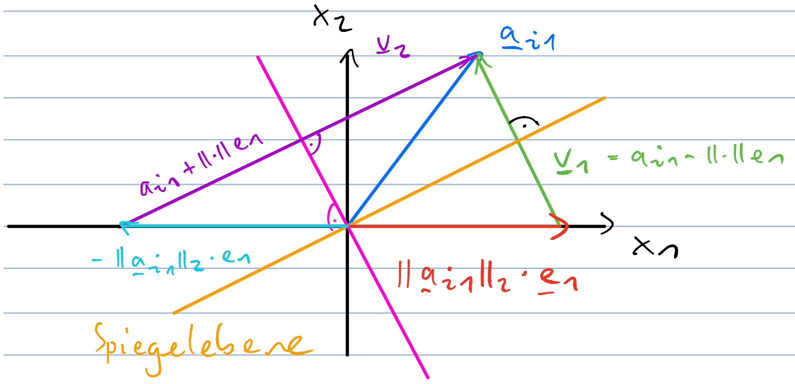
Bemerkung: Ist $\underline{v}$ auf die Länge 1 normiert, also $\underline{v}^T\underline{v} = 1$, so vereinfacht sich die Formel zu

$$\boxed{\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{I}} - 2\underline{v}\underline{v}^T}$$

o QR-Zerlegung mittels Housholdertransformation:

Absolut analoges Vorgehen zu Givens, ausser, dass das Werkzeug wieder ändert: Nun darf man nur mit Spiegelungen Gaussen. Aber, wie findet man $\underline{v}$?

Wir betrachten es grafisch:



mit $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ | & | & & | \end{bmatrix}$

und $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

⇝ Wir können $\underline{v}$ also einfach erhalten, indem wir den zu spiegelnden Spaltenvektor a_{i1} minus den Zielvektor auf der x_1-Achse (mit der Länge von a_{i1}, da längentreue Abbildung ‼) rechnen. (⚠ Wiederum 2 Lösungen)

Beispiel 14:

$$\underline{a}_{i1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \|\underline{a}_{i1}\|_2 = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = \underline{\underline{3}}, \quad \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{v} = \underline{a}_{i1} \pm \|\underline{a}_{i1}\|_2 \, \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{u} = \frac{1}{\|\underline{v}\|_2} \underline{v} = \frac{1}{\sqrt{1+4+1}} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(normieren, geht auch später wie oben gezeigt)

$$\downarrow$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{H}} = \underline{\underline{I}} - \frac{2}{\underline{v}^T \underline{v}} \underline{v}\,\underline{v}^T = \underline{\underline{I}} - 2\,\underline{u}\,\underline{u}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{6} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{6} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}}} = \underline{\underline{H}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{H}} \cdot \underline{a}_{i1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$, wissen wir ja schon von oben.

Bemerkung: Q wäre wie oben schlussendlich $(H_n \cdot \ldots \cdot H_1)^T$. Muss man auch die 2. Spalte von $\underline{\underline{A}}$, also a_{i2}, spiegeln, so spiegelt man natürlich auf $\underline{e}_2$ usw.!

Aufgaben

Serie 4 A.1 sowie Serie 4 A.4

o Lineare Räume <=> Vektorräume: Skript S.55

Alle Eigenschaften & Regeln, sowie Beispiele zu Vektorräumen finden sich im Skript.
Muss man überprüfen, ob es sich bei einer Menge um einen Vektorraum handelt, so kann man einfach stur alle 8 (je nach Definition können es auch nur 7 oder aber 9 sein) Axiome überprüfen.

Bemerkung: Einen Widerspruch findet man meistens am einfachsten mithilfe des 3. Axioms ⇝ die Existenz eines Nullvektors.

Beispiel 15 : Problem?

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} \boxed{1} \\ x \end{bmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$$

=> kein Vektorraum, da kein Nullelement gegenüber der Addition

Ergänzung: Uns interessieren auch komplexe Vektorräume, namentlich $C[a,b]$, der Raum der auf dem Intervall $[a,b]$ stetigen Funktionen ⇝ Es gelten dieselben Axiome.
Am häufigsten kommt der Raum der Polynome $\mathcal{P}$ vor.

o Lineare Unterräume <=> Untervektorräume: Skript S.56ff.

Alle Eigenschaften & Regeln, sowie Beispiele zu Untervektorräumen finden sich im Skript.

Aufgaben

Serie 5 A. 1 & 4 sowie Skript Beispiele 49-50

o Linearkombination, Erzeugendensystem, lineare Unabhängigkeit und Basis: Skript S. 58 - 61

Eine Einführung und Beispiele finden sich im Skript. Kurz in eigenen Worten:

- Kann jeder Vektor $b \in V$ eines Vektorraumes V als Linearkombination der Vektoren $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)} \in V$ dargestellt werden, so bilden ebendiese Vektoren ein Erzeugendensystem von V.

  Bemerkung: Es braucht genau so viele linear unabhängige Vektoren wie die Dimension n des Vektorraumes, um diesen aufzuspannen, im Erzeugendensystem dürfen aber auch redundante, also linear abhängige, Vektoren sein.

  Bemerkung: Muss man eine Menge an Vektoren daraufhin überprüfen, ob es sich um ein Erzeugendensystem handelt, so bildet man einfach die Matrix, gausst, und falls sie vollen Rang hat, so haben wir unser Bedürfnis an lin. unabh. Vektoren gedeckt, und haben folglich ein Erzeugendensystem.

- Die Basis eines VR besteht nur aus der minimal nötigen Anz. an lin. unabh. Vektoren, die nötig ist, um das Erzeugendensystem zu bilden. D.h. keine lin. abh. Vektoren!

⇝ Bestimmung einer Basis aus einer Vektorschar:

⇒ Matrix bilden, gaussen, Spalten mit Pivots $\widehat{=}$ den Vektoren der Basis (ursprüngliche Spaltenvektoren!)

Beispiel 16: $\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\4\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\0\\5\end{bmatrix}$ Wollen Basis des $\mathbb{R}^3$?

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \end{array} \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[III-I]{II+2I}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{III-II} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{5} & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{R}^3 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\4\\2\end{bmatrix}\right\}}}$$

Bemerkung: Das ist nicht die einzige gültige Auswahl aus der Vektorschar! Man kann jeweils auch zum nächsten nicht-null Element rutschen und dieses wählen, aber Achtung: natürlich nicht zweimal denselben Vektor.

⇒ Ebenfalls richtig:
- statt 4. den 6. Vektor
- statt 2. den 5. Vektor
- statt 1. den 3. Vektor usw.

Aufgaben

Serie 5 A. 2/5/8 sowie Skript Beispiele 51 - 56

○ Dimension : —

- Anzahl Vektoren, aus denen die Basis des Vektorraumes besteht
- Rang nach dem Gaussen $\hat{=}$ dim(Bild)

Aufgaben

Serie 5 A.8.b)

○ Basis in einem Funktionsraum: Skript S.59 & 61

Die Frage kommt auf, was denn die Basis im Raum der Polynome vom Grad kleiner 5 ist. Oder wie man in einem Vektorraum bestehend aus Funktionen zeigt, dass etwas eine Basis ist.

Die Beispiele 52 & 56 im Skript behandeln genau diese Fragen.

Aufgaben

Serie 6 A.2&6

○ Kern & Bild einer linearen Abbildung: Skript S. 79f

Die Definition und Eigenschaften des Kern & Bildes einer lin. Abb., sowie einige Beispiele zur Bestimmung derselben, finden sich im Skript.

- Basis des Kerns:

Es gilt generell, dass die Basis gerade den Lösungsvektoren des HLGS entspricht.

Beispiel 17: $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{\text{II} - 3\text{I}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 & 4 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_4 = s,\ x_3 = t,\ x_2 = -2s,$

$x_1 = -2t$

$\Rightarrow \text{Kern}(\underline{\underline{A}}) = \left\{ t \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ t, s \in \mathbb{R} \right\} = \underline{\underline{\text{span}\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}}$

- Basis des Bildes:

Bildmatrix gaussen, Pivotspalten $\hat{=}$ Spaltenvektoren der Basis.

Beispiel 18: (wie oben)

$\longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 & 4 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Basis Bild}(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{\text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} \right\}}}$

Aufgaben

Serie 5 A.3 & 7 & Serie 6 A.3 sowie im Skript Beispiele 75 & 76

o Koordinaten in einer bestimmten Basis: Skript S. 61

Ein kleines Beispiel findet sich im Skript. Ich möchte jedoch genauer darauf eingehen:

Jedes Element $\underline{x}$ eines Vektorraumes V lässt sich, bezüglich einer bestimmten Basis B des V.R., als Linearkombination der Basisvektoren folgendermassen darstellen:

$$\underline{x} = x_1 \cdot \underline{b}^{(1)} + x_2 \cdot \underline{b}^{(2)} + \dots + x_n \cdot \underline{b}^{(n)}$$

mit $x_1, x_2, \dots, x_n$ die Koordinaten von $\underline{x}$ bezüglich der Basis B, man schreibt auch $[\underline{x}]_B$, und $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n$ die Spaltenvektoren der Basis B.

Beispiel 19:

Gegeben folgende V.R. $V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{R} \right\}$ mit der Basis $\underline{\underline{B}} = [\underline{b}_1 \ \underline{b}_2] = \left[\underset{\underline{b}_1}{\boxed{\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}}} \ \underset{\underline{b}_2}{\boxed{\begin{matrix} 3 \\ 5 \end{matrix}}} \right]$. Suchen den Koordinatenvektor von $\underline{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \end{bmatrix}$ bzgl. B, also $[\underline{v}]_B$:

$[\underline{v}]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, wir wissen $\underline{v} = x_1 \cdot \underline{b}_1 + x_2 \cdot \underline{b}_2$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Kennen wir schon! $\rightsquigarrow$ Gaussverfahren:

$$x_1 = \frac{40}{7}, \quad x_2 = -\frac{22}{7} \quad \Rightarrow \quad [\underline{v}]_B = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 40 \\ -22 \end{bmatrix}$$

Beispiel 20: Anwendung der Koordinatendarstellung zur Findung einer Basis eines UVR:

Gegeben folgender Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$:

$$U := \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \}$$

und wir sollen nun eine Basis von U bestimmen.

$\Rightarrow$ U ist die Lösungsmenge des (aus einer Gleichung bestehenden) LGS $x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$. Zur Parametrisierung dieser Lösungsmenge kann man z.B. x_1, x_3 und x_4 als freie Parameter wählen und erhält dann $x_2 = 2x_3 - x_4$, d.h. man kann U schreiben als

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

und wegen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_1 \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}^{b_1} + x_3 \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}^{b_2} + x_4 \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^{b_3}$$

finden wir die Basis

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Beispiel 21: Koordinaten in einem Funktionenraum:

Sei P_2 der V.R. der reellen Polynome vom Grad ≤ 2. Sei

$$B = \{ b^{(1)} = 1, b^{(2)} = x-1, b^{(3)} = x^2 \}$$

eine Basis in P_2.

Schreiben Sie $p(x) = 7x^2 - 4x + 4$ in den Koordinaten der Basis B:

$$\Rightarrow 7x^2 - 4x + 4 \overset{!}{=} a_1 \cdot (x^2) + a_2 \cdot (x-1) + a_3 \cdot (1)$$

Durch Koeffizientenvergleich findet man leicht

$$a_1 = 7 , \quad a_2 = -4 , \quad a_3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad [p(x)]_B = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

○ Koordinatentransformation und Basiswechsel: Skript S. 81

Da es in einem beliebigen Vektorraum immer mehr als eine mögliche Basis gibt, müssen wir auch die Möglichkeit behandeln, zwischen diesen Basen zu wechseln.

Eine perfekte Einführung in die Thematik findet sich im Skript auf S. 81.

Dem aufmerksamen Leser ist mittlerweile bestimmt schon aufgefallen, dass wir oben in Beispiel 6.1 & 6.3 bereits Basiswechsel vollführt haben, ohne es bewusst zu merken. Denn wir haben von den Standardbasen ($\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ im $\mathbb{R}^2$ und $1, x, x^2$ im $\mathcal{P}_2$), die wir bis anhin *immer* angenommen haben, in andere Basen gewechselt!

Dies ist natürlich der einfachste Fall, wir können auch zwischen zwei komplett unterschiedlichen Basen wechseln.

Beispiel 22:

Sei V mit $\mathcal{B} := \{ \overbrace{1}^{b^{(1)}}, \overbrace{t}^{b^{(2)}}, \overbrace{t^3}^{b^{(3)}} \}$ & $\tilde{\mathcal{B}} := \{ \overbrace{3t}^{\tilde{b}^{(1)}}, \overbrace{2t^3+2}^{\tilde{b}^{(2)}}, \overbrace{t+1}^{\tilde{b}^{(3)}} \}$

Wollen nun die Basiswechselmatrix von $\tilde{\mathcal{B}}$ nach $\mathcal{B}$ finden, hierfür schreiben wir die Basisvektoren von $\tilde{\mathcal{B}}$ als Linearkombination der Basisvektoren von $\mathcal{B}$: ((5.41) im Skript)

$$\tilde{b}^{(1)} = a_1 \cdot b^{(1)} + a_2 \cdot b^{(2)} + a_3 \cdot b^{(3)} = \boxed{\boxed{0} \cdot b^{(1)} + \boxed{3} \cdot b^{(2)} + \boxed{0} \cdot b^{(3)}}$$
$$\tilde{b}^{(2)} = a_1 \cdot b^{(1)} + a_2 \cdot b^{(2)} + a_3 \cdot b^{(3)} = \boxed{\boxed{2} \cdot b^{(1)} + \boxed{0} \cdot b^{(2)} + \boxed{2} \cdot b^{(3)}}$$
$$\tilde{b}^{(3)} = a_1 \cdot b^{(1)} + a_2 \cdot b^{(2)} + a_3 \cdot b^{(3)} = \boxed{\boxed{1} \cdot b^{(1)} + \boxed{1} \cdot b^{(2)} + \boxed{0} \cdot b^{(3)}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}}}$$

⚠ Das Fehlende drehen der Koordinaten ist ein sehr häufiger Fehler!

Betrachten wir nun z.B. $g(t) = 5t + 2t^3$

Durch Koeffizientenvergleich finden wir einfach:

$$[g(t)]_{\tilde{B}} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} \frac{7}{3} \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}}} \left(= \frac{7}{3} \cdot (3t) + 1 \cdot (2t^3 + 2) - 2 \cdot (t+1) \right)$$

$[g(t)]_B$ könnte man natürlich gleich berechnen, da wir aber bereits $\underline{T}$ haben, rechnen wir einfach:

$$[g(t)]_B = \underline{T} \cdot [g(t)]_{\tilde{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{7}{3} \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}}}$$

was trivialerweise stimmt.

Für reelle Vektorräume mit Basisvektoren im üblichen Sinne (z.B. $\mathbb{R}^3$) kann man natürlich absolut analog Vorgehen. (Was ich auch sehr empfehle ;)) Jedoch gibt es für den Fall, dass die Basen durch eine $n \times n$-Matrix gegeben sind, noch folgenden Zusammenhang: (Zusammenstellung für Übersicht)

"Alte Basis zu neuer Basis": $\underline{\underline{B}} \cdot \underline{T} = \underline{\underline{\tilde{B}}}$

↳ alte Basisvektoren als lin. kombination der neuen Basisvektoren schreiben

"Neue Basis zu alter Basis": $\underline{\underline{\tilde{B}}} \cdot \underline{S} = \underline{\underline{B}}$

↳ neue Basisvektoren als lin. kombination der alten Basisvektoren schreiben

$$T = S^{-1}$$

Alte Koordinaten zu neuen Koordinaten: $\underline{T} \cdot \underline{\tilde{x}} = \underline{x}$

Neue Koordinaten zu alten Koordinaten: $\underline{S} \cdot \underline{x} = \underline{\tilde{x}}$

Wobei $\tilde{B}$ die alte und B die neue Matrix ist.

Die beiden Gleichungen $\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{\tilde{B}}}$ und $\underline{\underline{\tilde{B}}} \cdot \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{B}}$ kann man mit dem Gauss-Jordan Algorithmus lösen, genau gleich wie bei der Inversenberechnung, nur hat man nun nicht die Einheitsmatrix auf der rechten Seite. Oder aber mittels der Inversen.

$\sim$ = alt

= neu

Erklärung: (Für Matrixfall)

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl@{\qquad}l}
\underline{\underline{T}} &=& \underline{\underline{B}}^{-1}\,\underline{\underline{\tilde{B}}} & \underline{\underline{S}} &=& \underline{\underline{\tilde{B}}}^{-1}\,\underline{\underline{B}} & \left.\begin{array}{l}\text{Zusammenhang der}\\ \text{Matrizen}\end{array}\right\} \quad (1) \\
\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{T}} &=& \underline{\underline{\tilde{B}}} & \underline{\underline{\tilde{B}}}\,\underline{\underline{S}} &=& \underline{\underline{B}} & \\
\underline{V} &=& \underline{\underline{\hat{B}}}\,\underline{\tilde{x}} & \underline{v} &=& \underline{\underline{B}}\,\underline{x} & \mid \underline{V} := \text{Darzustellende Vektor (2)} \\
\Rightarrow \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{T}}\,\underline{\tilde{x}} &=& \underline{\underline{\tilde{B}}}\,\underline{\tilde{x}} & \Rightarrow \underline{\underline{\tilde{B}}}\,\underline{\underline{S}}\,\underline{x} &=& \underline{\underline{B}}\,\underline{x} & \mid \text{setzen (1) in (2) ein} \\
\underline{\underline{B}}\,\underline{x} &=& \underline{\underline{\tilde{B}}}\,\underline{\tilde{x}} & \underline{\underline{\tilde{B}}}\,\underline{\tilde{x}} &=& \underline{\underline{B}}\,\underline{x} & \left.\begin{array}{l}\text{logische Konsequenz, da}\\ \underline{\underline{B}}\,\underline{x} = \underline{v} = \underline{\underline{\tilde{B}}}\,\underline{\hat{x}} \text{ sein muss}\end{array}\right\} \\
\Rightarrow \underline{\underline{T}}\,\underline{\hat{x}} &=& \underline{x} & \Rightarrow \underline{\underline{S}}\,\underline{x} &=& \underline{\tilde{x}} &
\end{array}$$

Obige Rechnung soll einfach die Konsistenz der Zusammenhänge zeigen.

⚠ Viele Leute vertauschen anfangs die beiden Gleichungen für die Basiswechselmatrizen, da es unintuitiv erscheint, dass

"neue Basis" · "BW-Matrix von alt nach neu" = "alte Basis"

$$B \cdot T = \tilde{B}$$

Aufgaben

Serie 6 A. 4 sowie Skript Beispiele 77–79

∘ Lineare Abbildungen: Skript S. 76 f.

Lineare Abbildungen sind der Hauptbestandteil der linearen Algebra. Die genaue Definition und die Bedingungen linearer Abbildungen sowie diverse Beispiele finden sich im Skript.

Aufgaben

Serie 6 A.6 & Skript Beispiele 70 - 73

∘ Begriffserklärung Isomorphismus/Automorphismus: –

Auch wenn es nicht so relevant ist, möchte ich hier etwas auf diese beiden Begriffe eingehen, da sie im Hintergrund der Theorie stehen.

- **Isomorphismus**: Bezeichnet eine **bijektive** Abbildung zwischen zwei algebraischen Strukturen, bei uns sind es Vektorräume. (Bijektivität sollte aus der Analysis-Vorlesung bekannt sein, sonst fragt unbedingt.)
  Gibt es einen Isomorphismus zwischen zwei algebraischen Strukturen, dann heissen die beiden Strukturen zueinander isomorph.

- **Automorphismus**: Bezeichnet einen Isomorphismus von einer algebraischen Struktur (bei uns Vektorraum) auf sich selbst. Gibt es einen Automorphismus von einer algebraischen Struktur auf sich selbst, so nennt man sie automorph.

o Abbildungsmatrizen / Darstellungsmatrizen: Skript S. 77f.

Wie der Name bereits andeutet handelt es sich hierbei um die Matrizen, welche eine lin. Abb. darstellen. Definition & Eigenschaften im Skript.

Aufgaben

Serie 6 A. 6 sowie Skript Beispiel 74

o Kommutative Diagramme: –

Nachfolgend möchten wir verschiedene Arten von lin. Abb. und Abbildungsmatrizen betrachten. Aber um diese besser zu verstehen und auch grafisch betrachten zu können, benötigen wir sogenannte kommutative Diagramme:

Def: In der Mathematik stellt ein kommutatives Diagramm dar, dass verschiedene Verkettungen von Abbildungen das gleiche Ergebnis liefern

→ eine Abb. f von A nach B kann durch einen Pfeil dargestellt werden

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

→ eine Verkettung mit einer weiteren Abbildung g von B nach C kann durch das Aneinanderhängen der Pfeile ausgedrückt werden, so etwas nennt sich Diagramm:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

⇝ Will man dieser Verkettung einen Namen geben, so kann man einen weiteren Pfeil h von A nach C einzeichnen

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend left, "h"] & B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

Es wäre denkbar, dass h eine beliebige (bei uns immer lineare) Abbildung von A nach C ist. Wenn sie mit der Verkettung (am Ende dieser Theorie besprochen) $g \circ f$ übereinstimmt, sagt man, dass das Diagramm kommutiert.

⇝ Kurzgefasst: Ein Diagramm kommutiert, "wenn es egal ist, welchen Weg man wählt".

∘ Koordinatenabbildung: Skript S. 81 ff.

Wir spannen den Bogen zurück zum Thema der letzten Woche, und können nun abschliessend klären, was eine "Koordinatendarstellung" genau ist, und warum es sich um eine lineare Selbstabbildung handelt. Dafür betrachten wir erst folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[d, shift right, "k_X"'] & Y \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \arrow[d, shift right, "k_Y"'] \\
V \arrow[r, bend left, "A"] \arrow[u, shift right, "k_X^{-1}"'] & W \arrow[l, bend left, "A^{-1}"] \arrow[u, shift right, "k_Y^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

mit
- X, Y: Vektorräume beliebig
- V, W: korrespondierende Vektorräume im $\mathbb{R}^n$ & $\mathbb{R}^m$, Basen von X/Y
- f : lineare Abbildung von $X \to Y$
- A : Darstellungsmatrix von f

· k_X, k_Y: Koordinatendarstellung von X/Y

⇝ Wir können nun klar erkennen, was eine Koordinatenwahl bewirkt. Wir wechseln von einem komplizierten Vektorraum (z.B. P_2), zu einem einfachen, bekannten Vektorraum aus Matrizen (z.B. $\mathbb{R}^3$). In diesem können wir dann eine "komplexe" lin. Abb. f (z.B. die Ableitung) als "einfache" Matrixmultiplikation mit der Darstellungsmatrix A von f abbilden. Somit ist die Koordinatenwahl selbst ein Basiswechsel! Und ein Basiswechsel entspricht einem Koordinatenwechsel!

Die Frage der linearen Selbstabbildung können wir folgendermassen klären: X und V, sowie Y und W, repräsentieren denselben Vektorraum, einfach mit einer anderen zugrundeliegenden Basis?

Kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\tilde{V} \arrow[r, bend left, "\hat{A}"] \arrow[d, shift right, "T"'] & \tilde{W} \arrow[l, bend left, "\hat{A}^{-1}"] \arrow[d, shift right, "T'"'] \\
V \arrow[r, bend left, "A"] \arrow[u, shift right, "S"'] & W \arrow[l, bend left, "A^{-1}"] \arrow[u, shift right, "S'"']
\end{tikzcd}$$

mit $\tilde{V}, \hat{W}$: alte Basen des V.R. X und Y

V, W: neue Basen in denselben V.R. "

T, S, T', S': Basiswechselmatrizen

$A, \hat{A}$: Abbildungsmatrix in jeweiliger Basis

Wir erkennen, dass der Basiswechsel (und somit auch Koordinatenwechsel!) T & S nur eine lin. Abb. von X nach X respektive Y nach Y sind ⇝ eine lineare Selbstabbildung.

∘ Abbildungsmatrix bei einer Koordinatentransformation:

Nun kann man sich fragen, für was man die ganzen Basen- & Koordinatenwechsel macht. Die Antwort ist einfach, wir betrachten zwar nur einfache Probleme, welche man ohne Probleme in der jeweiligen Basis lösen kann, jedoch gibt es Probleme, die durch einen Basiswechsel <u>ungemein einfacher</u> werden. Dies ist eine Thematik, welche euch in eurem weiteren Studium häufig begleiten wird, ein Beispiel wäre die Fourier- und Laplacetransformation zur Analyse von Wechselstromnetzwerken.

Die komplette Problemlösung sieht in etwa so aus:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[d, shift right, "k_X"'] & Y \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \arrow[d, shift right, "k_Y"'] & \\
\tilde{V} \arrow[u, shift right, "k_X^{-1}"'] \arrow[r, bend left, "\tilde{A}"] \arrow[d, shift right, "T"'] & \tilde{W} \arrow[u, shift right, "k_Y^{-1}"'] \arrow[l, bend left, "\tilde{A}^{-1}"] \arrow[d, shift right, "T'"'] & \text{alte Basis} \\
V \arrow[u, shift right, "S"'] \arrow[r, bend left, "A"] & W \arrow[u, shift right, "S'"'] \arrow[l, bend left, "A^{-1}"] & \text{neue Basis}
\end{tikzcd}$$

Wir treffen also eine Koordinatenwahl (k_X, k_Y) und modellieren das Problem in $\tilde{V}/\tilde{W}$. Unter Umständen vereinfachen wir das Problem danach mithilfe eines Basis- & Koordinatenwechsels (T, T') um es zu lösen.

<u>Aufgaben:</u> Serie 6 A.5/6 & Skript Beispiele 80 & 81

o Verkettung linearer Operationen:

Es gibt häufig Verwirrung beim lesen eines kommutativen Diagrammes, deshalb hier kurz eine Erklärung zu Verkettung lin. Abb.:

Wir betrachten

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift right, "k_A"'] & W \arrow[r, "g"] \arrow[d, shift right, "k_B"'] & U \arrow[d, shift right, "k_C"'] \\ A \arrow[u, shift right, "k_A^{-1}"'] \arrow[r, "M_A^B"] \arrow[rr, bend right, "M_A^C"'] & B \arrow[u, shift right, "k_B^{-1}"'] \arrow[r, "M_B^C"] & C \arrow[u, shift right, "k_C^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

mit V, W, U: beliebige Vekt. Räume

A, B, C: jeweilige Basen

f, g: lin. Abbildungen

M_A^B, M_B^C: Darstellungsmatrizen

⇝ Wir verketten lineare Abbildungen in Matrixform analog zu den linearen Abbildungen:

Um von V nach U zu kommen, müssen wir erst f $(V \to W)$ und dann g $(W \to U)$ anwenden, wir schreiben $g \circ f$ $(V \to U)$. Wir lesen das Diagramm also eigentlich Rückwärts?, Genau gleich in den Basen: $\boxed{M_A^C = M_B^C \cdot M_A^B}$. Wir erkennen, die Verkettung entspricht der Matrixmultiplikation.

⇝ Was zuerst unintuitiv erscheint, lässt sich einfach durch die Rechtsassoziativität der Matrixmultiplikation erklären: Auf einen gegebenen Koordinatenvektor in A müssen wir erst M_A^B anwenden, und erst dann M_B^C, wir schreiben ja

$$[\underline{v}]_C = \underbrace{M_B^C \cdot \underbrace{M_A^B \cdot [\underline{v}]_A}_{[v]_B}}_{}$$

o Die verallgemeinerte Norm Skript S. 62 f.

Wir haben bereits früh die euklidische Norm betrachtet. Nun erweitern wir unseren Begriff der Norm und betrachten weitere Normen und die Paarung eines V.R. und einer Norm. Definition & Regeln der Norm, sowie reelle und komplexe Beispiele finden sich im Skript.

<u>Aufgaben:</u>

Skript Beispiele 57 - 60

o Das verallgemeinerte Skalarprodukt Skript S. 64 f.

Auch das euklidische Skalarprodukt haben wir bereits behandelt. Auch diesen Begriff erweitern wir nun: zentral ist vor allem der Begriff der <u>induzierten Norm</u>. Definition & Regeln des Skalarproduktes, sowie reelle und komplexe Beispiele finden sich im Skript.

<u>Aufgaben:</u>

Serie 7 A. 3 sowie Skript Beispiele 62 - 64

o Die Orthogonalprojektion: Skript S. 66

Die Orthogonalprojektion von $\underline{x} \in V$ auf $y \in V, y \neq 0$ ist:

$$\underline{z} = \frac{\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle}{\langle \underline{y}, \underline{y} \rangle} \cdot \underline{y}$$

Ich möchte euch aber eine Intuition geben, warum diese Formel stimmt, hierfür betrachten wir einmal das euklidische Skalarprodukt:

$\leadsto \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|_2 \cos\alpha$ mit $\|\underline{x}\|_2 \cos\alpha :=$ die Länge der Projektion in y Richtung $\hat{=} \|\underline{z}\|_2$

$$\Rightarrow \|\underline{x}\|_2 \cos\alpha = \frac{\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle}{\|\underline{y}\|_2} = \|\underline{z}\|_2$$

Nun wollen wir aber noch die Richtungsangabe, also in Richtung y:

$$\Rightarrow \underline{z} = \|\underline{z}\|_2 \cdot \underbrace{\frac{\underline{y}}{\|\underline{y}\|_2}}_{\substack{\text{Vektor in } y\text{-Richtung} \\ \text{aber normiert auf Länge 1.}}} = \frac{\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle}{\|\underline{y}\|_2} \cdot \frac{\underline{y}}{\|\underline{y}\|_2} = \frac{\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle}{\|\underline{y}\|_2^2} \cdot \underline{y}$$

und mit $\|y\|_2^2 \overset{!}{=} \langle y, y \rangle$ folgt obige Formel:

$$\boxed{\underline{z} = \frac{\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle}{\langle \underline{y}, \underline{y} \rangle} \cdot \underline{y}}$$

Dies kann man auf <u>alle</u> Skalarprodukte ausweiten!

Aufgaben:

Skript Beispiel 65

o Die Orthonormalbasis (ONB): Skript S. 66 unten

Wir leisten die Grundarbeit für das Gram-Schmidt-Verfahren.

Die beiden nötigen Theoreme findet ihr im Skript. Kurzgefasst ist es möglich, in jedem beliebigen Vektorraum nicht nur eine Basis, sondern sogar eine ONB, also eine Basis mit orthonormalen Einheitsvektoren, zu finden (stehen senkrecht aufeinander mit Länge 1).

Aufgaben:

Serie 8 A.4

o Das Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren:

Skript S. 67 - 75

Einer der wichtigsten Algorithmen den ihr dieses Semester lernt. Ermöglicht das Konstruieren einer ONB aus einer beliebigen Basis in einem Vektorraum. Das Kochrezept zum Algorithmus, sowie unzählige Beispiele finden sich im Skript.

Aufgaben:

Serie 7 A. 4 & 5 sowie Skript Beispiele 67 - 69

∘ Ausgleichsrechnung: Skript ab S. 119

In der echten Welt läuft praktisch nichts perfekt nach Modell ab, deshalb ist es zwar gut und schön, dass wir perfekte Gleichungssysteme (n Gleichungen für n Unbekannte, oder m Gleichungen für n Unbekannte mit erfüllten Kompatibilitätsbedingungen) mithilfe des Gauss-Algorithmus lösen können, jedoch treten solche Systeme praktisch nirgends auf. Realistisch gesehen haben wir fast immer mehr Messungen, als wir benötigen, und noch schlimmer, unerfüllte Kompatibilitätsbedingungen. Dies einfach, weil unsere Modellbildung nicht immer perfekt ist. In solchen Fällen kommt die sogenannte Ausgleichsrechnung zu tragen, welche eine mathematische Optimierungsmethode ist, mit dem Ziel, die Parameter des LGS möglichst "gut" anzunähern, um das LGS zu lösen.

Doch was heisst "gut", da scheiden sich die Geister. Was wir im Rahmen der Vorlesung betrachten, ist die sogenannte Methode der kleinsten Quadrate, bei der es darum geht, die Fehlerquadrate möglichst klein zu halten. Diese Methode kann man auf unterschiedliche

Arten anwenden, wir unterscheiden die Ausgleichsrechnung mit Hilfe der

- Normalengleichung: Skript S. 119 - 124
- QR-Zerlegung: Skript S. 125 - 130
- Singulärwertzerlegung: (schauen wir spezifisch an)

Der Grund für die verschiedenen Methoden liegt wieder einmal in der **Numerik** und der Stabilität der Algorithmen, sowie im Anwendungsbereich.

Die Kochrezepte sowie mehrere Beispiele zu den ersten beiden Methoden finden sich im Skript.

Aufgaben:

Serie 8 A.3 & 6 sowie Skript Bsp. 101-105

o Determinante: Skript S. 31 - 54

Die Determinante ist eine Funktion, welche jeder $n \times n$ Matrix eine reelle Zahl zuordnet.

⚠ Nicht definiert für nicht-quadratische Matrizen.

(Gram'sche Determinante einmal aussen vor gelassen.)

Definitionen und Berechnungsmethoden sowie unzählige Beispiele finden sich im Skript. Bemerkenswert sind die Regel von Sarrus (S.31) sowie der Laplac'sche Entwicklungssatz (S.32).

Unbedingt merken müsst ihr euch die Eigenschaften der Berechnung (S. 33) sowie, fast noch wichtiger, die Rechenregeln (S. 35).
Es werden sehr gerne Aufgaben zu Determinanten gestellt, in welchen eine einfache Anwendung der Rechenregeln grossen Rechenaufwand spart.

Aufgaben:

Serie 8 A.5 & Skript Beispiele 31 - 43

o Das Eigenwertproblem: Skript ab S. 90

Wir tauchen nun etwas tiefer ein in die Eigenschaften von lin. Abbildungen. Wir werden die sogenannten Eigenwerte & Eigenvektoren von Matrizen betrachten. Diese Konstrukte werden wir für mehrere Anwendungen benötigen, u.a. zur Diagonalisierung quadratischer Matrizen. Es gibt einen kurzen Exkurs ins Thema der Quadriken für interessierte, und schlussendlich werden wir die erlernten Werkzeuge dazu benutzen können, Differentialgleichungen zu lösen!

- **Eigenwerte (EW):** Skript S. 90

  Definition, Berechnungsmethode + Beispiele im Skript. Sehr wichtig ist der Begriff der algebraischen Vielfachheit (auch Multiplizität genannt).

- Eigenvektoren & Eigenraum (EV): Skript S. 91 ff.

Definition, Berechnungsmethode + kombinierte Beispiele (mit EW) im Skript. Besonders wichtig ist der Begriff der geometrischen Vielfachheit.

- EW + EV Eigenschaften: Skript S. 94

Betrachtet im Skript die wichtige Eigenschaft der Ähnlichkeit zweier Matrizen, sowie die Begriffe **einfach & halbeinfach.**

- Diagonalisierbarkeit: Skript S. 94 ff.

Ein wichtiger und zentraler Begriff künftiger Überlegungen. Definition, Eigenschaften und Rechenbeispiele im Skript.

- Das Eigenwertproblem symmetrischer Matrizen: S. 96 - 103

Es gibt einen guten Grund, warum wir symmetrische Matrizen bevorzugen. Betrachtet im Skript die ungemein vorteilhaften Eigenschaften symmetrische Matrizen im Bezug auf das Eigenwertproblem. Ausserdem findet ihr auf den Folgeseiten viele Rechenbeispiele, welche auch wieder die EW & EV Berechnungen beinhalten.

Aufgaben: Serie 9 A.3 & 4, Skript Bsp. 82 - 90

∘ Anwendungen des Eigenwertproblemes: Skript ab S. 104

Wir kommen zu den unzähligen Anwendungen. Im Rahmen der Vorlesung behandeln wir grob.

- Berechnung von $\underline{\underline{A}}^k \underline{x}$: Skript S. 104 ff.
- Berechnung von $e^{\underline{\underline{A}}}$: Skript S. 106 ff.
- Matrixnormen : Skript S. 109
- Die Hauptachsentransformation quadratischer Formen (Quadriken): Skript S. 110 - 116
- Berechnung lokaler Extrema: Skript S. 116 ff.

Wobei die Berechnung des Matrixexponentials essentiell zur Lösung von Differentialgleichungen ist. Die Berechnung von $\underline{\underline{A}}^k \underline{x}$ beschäftigt sich mit der Frage nach der Auswirkung einer mehrfachen Anwendung einer Matrix auf einen Vektor (gab schon Prüfungsfragen diesbezüglich). Matrixnormen wurden u.U. bereits behandelt, einige können jedoch erst jetzt verstanden werden. Die Quadriken wurden evtl. kurz angesprochen, dahinter verbirgt sich für Interessierte einiges, es gibt jedoch auch einfach ein Kochrezept und eine Tabelle, welche die wichtigsten Kegelschnitte / Quadriken zusammenfasst. Auch die Berechnung lokaler Extremas wird kurz angesprochen, jedoch sehr selten geprüft.

Aufgaben: Serie 10 A.3, Skript Bsp. 91 - 94

o Differentialgleichungen: Skript ab S.131

Mit den nun neu erlernten Werkzeugen sind wir in der Lage, lineare DGL beliebiger Ordnung zu lösen. Im Rahmen der Vorlesung interessieren wir uns aber vor allem für DGL 1. und 2. Ordnung. Das Vorgehen ist dabei analog zum bekannten Vorgehen aus der Analysis. Nur interessieren wir uns nunmehr nicht für eine einzige DGL, sondern für ganze DGL-Systeme!

- **Lineare Systeme erster Ordnung:** Skript S. 131-141

  Zuerst betrachten wir DGL erster Ordnung. Die Definition solcher Systeme, die allgemeine Lösung sowie das Anfangswertproblem und dutzende Beispiele finden sich im Skript.

- **Lineare Systeme zweiter Ordnung:** Skript S.142-149

  Dasselbe trifft auf die Systeme zweiter Ordnung zu. Erfahrungsgemäss werden an Prüfungen eher Systeme erster Ordnung geprüft.

Aufgaben:

Serie 9 A.5 sowie Skript Beispiele 106-110

∘ Definitheit von Matrizen: Skript S. 117

Neben den tollen Eigenschaften von symmetrischen Matrizen, finden sich noch viele weitere hilfreiche Eigenschaften von symmetrisch positiv definiten Matrizen, kurz s.p.d. Nun müssen wir aber erst einmal bestimmen können, ob eine Matrix positiv definit ist. Die Definition und Eigenschaften zur Definitheit finden sich im Skript. Das meiner Meinung nach wichtigste darin zu findende ist jedoch das Hurwitz-Kriterium

Beispiel 11.1: für symmetrische Matrizen.

Bestimmen Sie die Definitheit folgender Matrizen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

A: $c_1 = \det[1] = 1 > 0$, $c_2 = \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 4 - 9 = -5 < 0$

$\Rightarrow$ Nach Hurwitz indefinit.

B: $c_1 = \det[2] = 2 > 0$, $c_2 = \det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = 16 - 16 = 0 \overset{?}{\leq} 0$

$\Rightarrow$ Keine Aussage nach Hurwitz, Vorzeichenregel befolgt aber nicht strikt grösser 0, könnte positiv semi-definit sein aber unklar.

C: $c_1 = \det[2] = 2 > 0$, $c_2 = \det\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = 16 > 0$

$$c_3 = \det\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix} = 2 \cdot \det\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= 2 \cdot (24 - 16) = 16 > 0$$

$\Rightarrow$ Nach Hurwitz $\underline{\underline{\text{positiv definit}}}$

o Symmetrisch positiv definite Matrizen:

Im Unterricht haben wir folgende nennenswerte Eigenschaften & Anwendungen gesehen:

- Alle EW einer s.p.d. Matrix sind reell & positiv
- Man kann mithilfe s.p.d. Matrizen ein Skalarprodukt definieren, und zwar $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle := \underline{x}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{y}$
- Quadriken basierend auf s.p.d. Matritzen bilden Paraboloide ab

Aufgaben:

Serie 10 A. 4

o Singulärwertzerlegung (SVD): Skript ab S.161

Der Krönende Abschluss der Vorlesung und etwas vom Wichtigsten, das ihr dieses Semester gelernt habt. Man braucht diese Zerlegung vor allem in der Numerik, zum Beispiel für die Ausgleichsrechnung. Die Definition sowie Berechnung der SVD findet ihr im Skript. Es sind ebenfalls einige Beispiele angebracht.

Aufgaben:

Serie 11 A.1/3/5 sowie Skript Beispiele 115 & 116

· Ausgleichsrechnung mittels SVD: —

Das Kochrezept mit allen nötigen Schritten sowie der theoretischen Grundlage des Algorithmus findet sich in der Lösung der letzten Serie. Darin wird ausserdem auch der Begriff der Pseudoinversen eingeführt, ein äusserst interessantes Konstrukt, welches ihr im Studium mehrmals antreffen werdet. Betrachtet auch die beiden Prüfungsaufgaben zu diesem Thema mit meinen Kommentaren. So eine Aufgabe kommt sicher an der Prüfung!

Aufgaben:

Serie 11 A.6 sowie Prüfungsaufgaben

Anmerkungen

Matlab:

Es ist schwer zu sagen ob eine Aufgabe zu Matlab an der Prüfung kommt, aber man muss damit rechnen. Der Hauptassistent hat uns aber mitgeteilt, dass, falls eine Aufgabe kommen sollte, keine Schleifen und nichts neues drankommt. Sprich, es wäre im Rahmen von "Wie würdet ihr in Matlab $Ax=b$ mit der QR-Zerlegung lösen?". Ich würde einfach sicher gehen, dass ihr alle Grundbefehle beherscht. Eine Zusammenstellung dieser findet ihr im Dokument "**Matlab-Befehle**" auf meiner Webseite unter "Assistenz".

Beweise:

Klassisch kommt eine Beweisaufgabe an der Prüfung, diese hält sich aber meist nahe an den Übungen, und ist im Rahmen von geschickten algebraischen Umformungen zu lösen. Ich empfehle hierbei vor allem das Studium von 9.2, 9.6, 10.4, 10.5, 10.6, 11.4 & 11.5 sowie Konzepte der Vorlesung (z.B. Schur-Zerlegung)

Dr. V. Gradinaru D-ITET, D-MATL, RW Winter 2016

Basisprüfung Lineare Algebra

Wichtige Hinweise

- Zweistündige Prüfung.
- Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten eigene Notizen (von Hand geschrieben). Taschenrechner sind NICHT erlaubt.
- Alle Aufgaben werden gleich gewichtet.
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen. Nicht motivierte Lösungen (ausser bei der Multiple-Choice-Aufgabe) werden nicht akzeptiert!
- Tragen Sie die Lösung der Aufgabe 6 (Multiple Choice) auf dem Extrablatt ein.

Name		Note
Vorname		
Studiengang		
Leginummer		
Prüfung	Lineare Algebra	
Datum	12.02.2016	

1	2	3	4	5	6	Punkte

- Bitte füllen Sie zuerst das Deckblatt aus.
- Legen Sie Ihre Legi auf den Tisch.
- Schalten Sie Ihr Handy aus.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite, und schreiben Sie Ihren Namen auf alle Blätter.
- Bitte nicht mit Bleistift schreiben. Auch nicht mit rot oder grün.
- Versuchen Sie Ihren Lösungsweg möglichst klar darzustellen und arbeiten Sie sorgfältig!
- **Schauen Sie das Prüfungsblatt erst an, wenn der Assistent das Signal dazu gibt!**

Viel Erfolg!

1. Gegeben seien die Vektoren

$$a^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; a^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \; a^{(3)} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

a) Konstruieren Sie mit Hilfe des Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens aus $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $a^{(3)}$ eine orthonormale Basis $b^{(1)}$, $b^{(2)}$, $b^{(3)}$ bezüglich des Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^3$.

b) Bestimmen Sie eine QR-Zerlegung von $A = [a^{(1)}\; a^{(2)}\; a^{(3)}]$.

2. Für ein Experiment betrachtet man das folgende Model

$$y = \beta_1 x + \beta_2.$$

Zur Bestimmung der Parameter $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ liegen die folgende Messungen für y_i, $i = 1, 2, 3$, vor:

x_i	2	0	-2
y_i	$\sqrt{6}$	$-\sqrt{6}$	$2\sqrt{6}$

Die Parameter β_1 und β_2 sollen bestimmt werden, so dass $\sum_{i=1}^{3} |y_i - (\beta_1 x_i + \beta_2)|^2$ minimal wird.

Schreiben Sie dies als ein Ausgleichungsproblem der Form

$$A\beta = b$$

und lösen Sie es mit Hilfe der Singulärwertzerlegung.

3. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Bestimmen Sie eine Matrix T und eine Diagonalmatrix D, so dass $A = TDT^{-1}$ gilt.

b) Nehmen sie an, dass die Matrizen T und D schon in Matlab eingegeben wurden, wie auch ein Spaltenvektor v der Länge 3. Schreiben Sie einen Matlab-Code, der $w = A^{100}v$ berechnet. Dabei dürfen keine Potenzen von Matrizen mit ˆ berechnet werden und auch keine Schleifen benutzt werden.

Siehe nächstes Blatt!

4. Sei $\mathcal{P}^4$ der Vektorraum der Polynome vom Grad < 4. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{F}$ von $\mathcal{P}^4$ in sich

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{F}: & \mathcal{P}^4 & \longrightarrow & \mathcal{P}^4 \\ & f(x) & \longmapsto & xf'(x) + f(x) \end{array}$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ eine lineare Abbildung ist.

b) Gegeben sei im Urbildraum und im Bildraum die Basis 1, x, x^2, x^3. Durch welche Matrix A wird $\mathcal{F}$ beschreiben?

c) Gegeben seien im Urbildraum die Basis $1 + x$, $1 - x$, $x^2 - 1$, $1 + 2x - 2x^2 + x^3$ und im Bildraum dieselbe Basis wie in **b)**. Welches ist die neue Matrix B, die $\mathcal{F}$ nach dem Basiswechsel beschreibt?

5. **a)** Gegeben seien $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ und die folgende Menge von Funktionen

$$M = \{f \in C[x_0, x_n] : f|_{[x_{i-1}, x_i]} \in \mathcal{P}_2[x_{i-1}, x_i], i = 1, \ldots, n\}.$$

Diese Funktionen sind stetig auf $[x_0, x_n]$ und auf jedem Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ ein Polynom mit Grad < 2. Zeigen Sie: M ist ein linearer Raum (Vektorraum).

b) Nun betrachten wir die Funktionen $f_0, \ldots, f_n \in M$ mit der Eigenschaft

$$f_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \text{für } i, j \in \{0, \ldots, n\}.$$

Zeigen Sie, dass $f_0, \ldots, f_n$ linear unabhängig sind.

6. Multiple Choice: Auf dem Extrablatt Richtig oder Falsch ankreuzen.

a) Wir betrachten ein lineares Gleichungssystem mit m Zeilen, n Spalten und Rang r. Das Gleichungssystem ist *nicht* für beliebige rechte Seiten lösbar, wenn $r < m$.

b) Die folgenden drei Vektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

c) Die LR-Zerlegung angewandt auf die Matrix A liefert die Rechtsdreiecksmatrix

$$R = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Daraus folgt $\det A = 60$.

Bitte wenden!

d) Gegeben seien zwei $n \times n$-Matrizen A und B. Ist λ ein Eigenwert von A und auch ein Eigenwert von B, dann ist λ ein Eigenwert von $A + B$.

e) Die Dimension des Bildes von

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

beträgt 2.

f) Sei A eine 3×3-Matrix mit 3 verschiedenen Eigenwerten. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\dot{y}(t) = Ay(t), \quad y(0) = y_0.$$

Es gilt: Ist y_0 ein Eigenvektor von A zu einem Eigenwert $\lambda < 0$, so strebt $y(t)$ gegen 0 für $t \to \infty$.

g) Sei

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Zudem sei U, S, V eine Singulärwertzerlegung von A, so dass $A = USV^T$. Es gilt:

$$S = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

h) Die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & -4 & 7 \\ -2 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

ist orthogonal-ähnlich zu einer Diagonalmatrix.

Michael Baumgartner

Basisprüfung lineare Algebra - Winter 2016

Im folgenden handelt es sich um einen Lösungsvorschlag meinerseits und ich kann nicht für Korrektheit garantieren!

1.a) Gram-Schmidt:

$$b^{(1)} = \frac{a^{(1)}}{\|a^{(1)}\|_2} \qquad b^{(2)'} = a^{(2)} - \langle a^{(2)}, b^{(1)} \rangle b^{(1)} \qquad b^{(2)} = \frac{b^{(2)'}}{\|b^{(2)'}\|_2}$$

$$b^{(3)'} = a^{(3)} - \langle a^{(3)}, b^{(2)} \rangle b^{(2)} - \langle a^{(3)}, b^{(1)} \rangle b^{(1)} \qquad b^{(3)} = \frac{b^{(3)'}}{\|b^{(3)'}\|_2}$$

$$b^{(1)} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

$$b^{(2)'} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$b^{(2)} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}}}$$

$$b^{(3)'} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} - \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$b^{(3)} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

b) Die Idee: $b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}$ bilden gerade die Matrix Q

$\Rightarrow \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}}$ $\rightarrow$ 2 Möglichkeiten, entweder

1) $Q^{-1} A = R$ Bem. $Q^{-1} = Q^T$

2) Gaussen - Jordan

1) $Q^T A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{6} & -\sqrt{6} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}}}$

2)

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 2 & 3 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -2 & 3 \end{array}\right. \longrightarrow \left.\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -2 & 3 \end{array}\right.$$

$$\longrightarrow \left.\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 3 \end{array}\right. \longrightarrow \left.\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 3 \end{array}\right.$$

$$\longrightarrow \left.\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 3 \end{array}\right. \longrightarrow \left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{6} & -\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{3} \end{array}\right.$$

2) Ausgleichsrechnung mit SVD:

Die Matrix der Fehlergleichung lautet:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

Singulärwertzerlegung:

$$A = USV^T$$

U: Besteht aus den EV von AA^T

V: Besteht aus den EV von A^TA

S: $\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_p})$ EW von AA^T oder A^TA $p = \min(m,n)$

Es gibt wieder 2 Möglichkeiten. Man kann zuerst U oder aber V berechnen. Aufgrund der Dimension von A wird U eine 3×3 & V eine 2×2 Matrix.

Die jeweils andere Matrix erhält man mit dem Zusammenhang:

$$v^{(i)} = \frac{A^T u^{(i)}}{s^{(i)}} \quad \text{oder} \quad u^{(i)} = \frac{A v^{(i)}}{s^{(i)}}$$

Berechnet man zuerst V, so muss man den 3. Einheitsvektor von U noch mit Gram-Schmidt oder hier bei einer 3x3 Matrix mit dem Vektorprodukt rechnen. Wir berechnen hier beides

1) u:

$$AA^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

EW: $\det(AA^T - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & 1 & -3 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ -3 & 1 & 5-\lambda \end{bmatrix}$

$$= (5-\lambda)\det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 5-\lambda \end{bmatrix} - \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5-\lambda \end{bmatrix} - 3\det\begin{bmatrix} 1 & 1-\lambda \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (5-\lambda)(1-\lambda)(5-\lambda) - (5-\lambda) - (5-\lambda) - 3 - 3 - 9 + 9\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 35\lambda + \cancel{25} - \cancel{5} + \lambda - \cancel{5} + \lambda - \cancel{15} + 9\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 24\lambda = \lambda(-\lambda^2 + 11\lambda - 24) = \lambda(\lambda - 8)(-\lambda + 3)$$

$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = 3 \qquad \lambda_3 = 8$

$\Rightarrow \quad \sigma_3 = 0 \qquad \sigma_2 = \underline{\sqrt{3}} \qquad \sigma_1 = \underline{2\sqrt{2}}$ ⚠ Der Grösse nach ordnen!

EV: $\lambda_1 = 0$:

$$AA^T x = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Kern}(AA^T)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_3 = s \qquad x_2 = -2s \qquad x_1 = s$

$$\Rightarrow u^{(3)'} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{u^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$\lambda_2 = 3 : \quad (AA^T - 3 I_3)\, x = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$x_3 = s \qquad x_2 = s \qquad x_1 = s$$

$$\Rightarrow u^{(2)'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{u^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$\lambda_3 = 8 : \quad (AA^T - 8 I_3)\, x = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -7 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$x_3 = s \qquad x_2 = 0 \qquad x_1 = -s$$

$$\Rightarrow u^{(1)'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{u^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{U} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}} \qquad \underline{\underline{S} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

Berechnung von V aus U:

$$v^{(1)} = \frac{A^T u^{(1)}}{s^{(1)}} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}{2\sqrt{2}} = \frac{\begin{bmatrix} -2\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}}{2\sqrt{2}} = \underline{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$$v^{(2)} = \frac{A^T u^{(2)}}{s^{(2)}} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}}{\sqrt{3}} = \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}}{\sqrt{3}} = \underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{V = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}}$$

⚠ Wichtig: In der SVD dann V^T

2) Variante zuerst V berechnen (da V kleiner ist wahrscheinlich auch besser):

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

EW: $\det(A^T A - \lambda I_2) = \det \begin{bmatrix} 8-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}$

$$= (8-\lambda)(3-\lambda) \Rightarrow \lambda_1 = 8 \quad \lambda_2 = 3$$

$$\sigma_1 = 2\sqrt{2} \quad \sigma_2 = \sqrt{3}$$

EV: $\lambda_1 = 8 \quad (A^T A - 8 I_2)x = 0$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{array}\right] \quad x_1 = s \quad x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{v^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

EV: $\lambda_2 = 3 \quad (A^T A - 3 I_2)x = 0$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad x_2 = s \quad x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{v^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}} \qquad \underline{\underline{S = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}}$$

U aus V berechnen:

$$u^{(1)} = \frac{A v^{(1)}}{s^{(1)}} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{2\sqrt{2}} = \underline{\frac{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}}{2\sqrt{2}}} = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}$$

$$u^{(2)} = \frac{A v^{(2)}}{s^{(2)}} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{\sqrt{3}} = \underline{\frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\sqrt{3}}} = \underline{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$u^{(3)}$ konstruieren mittels Vektorprodukt:

$$u^{(1)} \times u^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}}$$

Wird immer bereits normiert sein?

$$\Rightarrow \underline{\underline{U}} = \underline{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}}$$

Man bemerkt, dass die Vorzeichen der Spalten sich unterscheiden können → U & V sind nicht eindeutig. Die Methode 2 war deutlich schneller, lohnt sich wohl aber nur wenn der Dimensionsunterschied 1 beträgt und die Dimension des grösseren höchstens 3, da man ansonsten Gram-Schmidt anwenden muss.

Nun zum lösen des Ausgleichproblems:

Möchte die Residuen minimieren: $\min \|r\|_2^2$

$$\|r\|_2^2 = \|Ac - b\|_2^2 = \|USV^Tc - b\|_2^2$$

$$= \|U(SV^Tc - U^Tb)\|_2^2 \quad | \; U \text{ orth.} \to \|U\|_2 = 1$$

$$= \|SV^Tc - d\|_2^2 \quad | \; U^Tb = d$$

$$= \|\hat{S}V^Tc - d_0\|_2^2 + \|d_1\|_2^2 \quad | \; S = \begin{bmatrix} \hat{S} \\ 0 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ müssen $\hat{S}V^Tc = d_0$ lösen!

$\to$ 2 Fälle

1) $\hat{S}$ invertierbar $\to$ $c = V\hat{S}^{-1}d_0$

2) $\hat{S}$ <u>nicht</u> invertierbar $\to$ $y = V^Tc$

$$y = \hat{S}^+ d_0 \quad | \; \hat{S}^+ \to \text{Pseudo-inverse}$$

$$c = Vy$$

Ich benutze U & V aus der 2. Variante:

$$\Rightarrow \hat{S} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \qquad \det \hat{S} = 2\sqrt{6} \neq 0 \to \text{invertierbar!}$$

$$d_0 = U^T \cdot b = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

* kann man sich sparen

$$= \underline{\begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow c = V \hat{S}^{-1} d_0$$

$$c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}}}$$

$$\hat{S}^{-1} = \frac{1}{\det \hat{S}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \hat{S}^{+}$$

$$\Rightarrow \quad \beta_1 = \underline{\underline{-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}} \qquad \beta_2 = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}}$$

3) Diagonalisierung einer quadratischen unsymmetrischen Matrix.

a) EW: $\det(A - \lambda I_3) = \det\begin{bmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$

$$= -\lambda \det\begin{bmatrix} -\lambda & -2 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} + 2\det\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -\lambda & -2 \end{bmatrix}$$

$$= -\lambda(-\lambda(2-\lambda) - 2) + 2(-2(2-\lambda) + 2) + 4 + 2\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 4\lambda - \cancel{8} + \cancel{4} + \cancel{4} + 2\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 8\lambda = \lambda(-\lambda^2 + 2\lambda + 8)$$

$$= \lambda(-\lambda - 2)(\lambda - 4)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -2 \quad \lambda_3 = 4$

Jeder EW hat AM $= 1$ $\Rightarrow$ A ist auch wirklich diagonalisierbar?

(Da GM auch 1 sein muss)

EV: $\lambda_1 = 0 \Rightarrow$ Kern (A)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_3 = s \quad x_2 = s \quad x_1 = -s$

$$\Rightarrow \underline{t^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

könnte man noch normieren, für diese Aufgabe jedoch unnötig?

$\lambda_2 = -2 \qquad (A + 2I_3)x = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_3 = 0 \qquad x_2 = s \qquad x_1 = s$

$$\Rightarrow \quad \underline{t^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$\lambda_3 = 4 \qquad (A - 4I_3)x = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_3 = s \qquad x_2 = -s \qquad x_1 = s$

$$\Rightarrow \quad \underline{t^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}} \checkmark \qquad \underline{\underline{\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}} \checkmark$$

Achtung: Reihenfolge von D & T beachten

immer EW & EV in gleicher Spalte!

b) Mein Vorschlag:

Die Eigenwerte aus D holen, potenzieren, ein neues D' machen und dann lösen, weil's Gradinarm ist am Besten ohne Inverse.

Der Code würde dann in etwa so aussehen:

```
L1 = D(1,1);   % EW 1
L1_100 = L1^100;
L2 = D(2,2);   % EW 2
L2_100 = L2^100;
L3 = D(3,3);
L3_100 = L3^100;
D_100 = [L1_100   0        0
         0        L2_100   0
         0        0        L3_100];
```

y = T\v   % $w = T D\_100 \underbrace{T^{-1} v}_{y}$

```
w = T D_100 y
```

Ich weiss nicht wie wahrscheinlich es ist, dass dieses Jahr eine MatLab Aufgabe an der Prüfung gestellt wird, aber schaut, dass ihr alle nötigen Befehle in diesem Rahmen beherrscht.

4) a) Bedingungen für eine lineare Abbildung

1) $f(a+b) = f(a) + f(b)$

2) $f(\alpha a) = \alpha f(a)$

→ wurde in den Übungen schonmal gemacht

Lösung: Zunächst ist $\mathcal{A}$ wohldefiniert in den angegebenen Räumen, da $t(1)'' = 0 \in \mathcal{U}_2$, $t(t^2)'' = 2t \in \mathcal{U}_2$ und $t(t^4)'' = 12t^3 \in \mathcal{U}_2$. Ausserdem gilt für alle $x, y \in \mathcal{G}_3$, $\alpha \in \mathbb{R}$, dass

$$\mathcal{A}(x + \alpha y) = t(x'' + \alpha y'') = tx'' + \alpha t y'' = \mathcal{A}x + \alpha \mathcal{A}y.$$

Somit ist $\mathcal{A}$ linear.

1. Zeigen, dass die Abbildung wohldefiniert ist:

$F(1) = 1 \in P_4$, $F(x) = 2x \in P_4$, $F(x^2) = 2x \in P_4$, $F(x^3) = 4x^3 \in P_4$

2. Kriterien 1) & 2) überprüfen → kann und sollte man zusammenfassen:

$$\begin{aligned} F(a+\alpha b) &= x(a+\alpha b)' + (a+\alpha b) \\ &= xa' + \alpha x b' + a + \alpha b \\ &= xa' + a + \alpha(xb' + b) \\ &= F(a) + \alpha F(b) \quad \checkmark \end{aligned}$$

b) Lineare Selbstabbildung: auf konsistente Reihenfolge achten!

$$\begin{aligned} 1 &\xrightarrow{F} 1 &&= 1 + 0x + 0x^2 + 0x^3 \\ x &\rightarrow 2x &&= 0 + 2x + 0x^2 + 0x^3 \\ x^2 &\rightarrow 2x^2 + x^2 &&= 0 + 0x + 3x^2 + 0x^3 \\ x^3 &\rightarrow 3x^3 + x^3 &&= 0 + 0x + 0x^2 + 4x^3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}$$

Wenn der Koordinatenvektor so gelesen wird.

c) 2 Möglichkeiten

1) wie in b) nochmals

2) mit kommutativem Diagramm

1) $1 + x = 2x + 1 \qquad = 1 + 2x + 0x^2 + 0x^3$

$1 - x = -2x + 1 \qquad = 1 - 2x + 0x^2 + 0x^3$

$x^2 - 1 = 3x^2 - 1 \qquad = -1 + 0x + 3x^2 + 0x^3$

$1 + 2x - 2x^2 + x^3 =$

$3x^3 - 4x^2 + 2x + x^3 - 2x^2 + 2x + 1 = 1 + 4x - 6x^2 + 4x^3$

$$\Rightarrow \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

---

2) $1 + x \qquad = 1 + 1x + 0x^2 + 0x^3$

$1 - x \qquad = 1 - 1x + 0x^2 + 0x^3$

$x^2 - 1 \qquad = -1 + 0x + 1x^2 + 0x^3$

$1 + 2x - 2x^2 + x^3 = 1 + 2x - 2x^2 + 1x^3$

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "A"] & B \\ \tilde{B} \arrow[u, "T"] \arrow[ur, "B"'] & \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow B = AT$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}}$$

Etwa gleich schnell, mit 2) muss man jedoch die Funktionen nicht mehr berechnen → weniger Fehler.

Da mir die Lösungen nicht zur Verfügung stehen kann ich nicht garantieren, dass die folgende Argumentation hält!

5) a) Linearer Vektorraum $\rightarrow$ 7 Regeln

$M = \{ f \in C[x_0, x_n] : f|_{[x_{i-1}, x_i]} \in P_2[x_{i-1}, x_i], i = 1, \dots, n\}$

Interpretation: Menge aller Funktionen die auf dem Intervall $[x_0, x_n]$ stetig definiert sind.

Die Funktionen sind $\in P_2$ (also Polynome mit Grad <2) $\Rightarrow$ Monome der Form $ax+b$.

1) $\forall a(x), b(x) \in M : \quad a(x)+b(x) = b(x)+a(x)$

$a(x)+b(x) = a_1x+a_2+b_1x+b_2 = (a_1+b_1)x+a_2+b_2$

$= (b_1+a_1)x+(b_2+a_2) = b_1x+b_2+a_1x+a_2$

$= b(x)+a(x)$

2) $\forall a(x), b(x), c(x) \in M : \quad a(x)+(b(x)+c(x)) = (a(x)+b(x))+c(x)$

$= a_1x+a_2+(b_1x+b_2+c_1x+c_2)$

$= a_1x+a_2+b_1x+b_2+c_1x+c_2$

$= (a_1x+a_2+b_1x+b_2)+c_1x+c_2$

$= (a(x)+b(x))+c(x)$

3) $\exists 0 \in M$ s.d. $\forall a(x) \in M : \quad a(x)+0 = a(x)$

$0 \in M := cx+d$ mit $c = d = 0$

$a(x)+0 = a_1x+a_2+0x+0 = a_1x+a_2$

$= a(x)$

4) $\forall a(x) \in M \; \exists -a(x) \in M$ s.d. $a(x) + (-a(x)) = 0$

$$a(x) = a_1 x + a_2$$

$$-a(x) := -a_1 x - a_2$$

$$a(x) + (-a(x)) = a_1 x + a_2 + (-a_1 x - a_2)$$

$$= (a_1 - a_1)x + (a_2 - a_2) = 0x + 0 =: 0$$

5) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \; \forall a(x) \in M: \; (\alpha \cdot \beta) a(x) = \alpha(\beta \cdot a(x))$

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot a(x) = (\alpha \cdot \beta)(a_1 x + a_2)$$

$$= \alpha\beta a_1 x + \alpha\beta a_2 = \alpha(\beta a_1 x + \beta a_2)$$

$$= \alpha(\beta a(x))$$

6) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \; \forall a(x) \in M: \; (\alpha + \beta) a(x) = \alpha a(x) + \beta a(x)$

$$(\alpha + \beta) a(x) = (\alpha + \beta)(a_1 x + a_2) = \alpha a_1 x + \beta a_1 x + \alpha a_2 + \beta a_2$$

$$= \alpha(a_1 x + a_2) + \beta(a_1 x + a_2) = \alpha a(x) + \beta a(x)$$

7) $\forall a(x) \in M: \quad \mathbb{1} \cdot a(x) = a(x)$

$$\mathbb{1} := 1$$

$$\mathbb{1} \cdot a(x) = 1(a_1 x + a_2) = a_1 x + a_2 = a(x)$$

Ich nehme kaum an, dass ohne Zsmfsg solch eine Aufgabe kommt, und falls doch, würde ich eher folgendermassen Argumentieren, aber auch hier kann ich nicht garantieren, dass es reichen würde?

Alternative: Da alle $f \in M$ auch $\in C[x_0, x_n]$ kann man auch auf die Idee kommen, dass M ein Untervektorraum von C ist. Da man weiss, dass ein UVR auch ein VR ist, müsste man nur folgende zwei "einfachere" Bedingungen zeigen:

1) $\forall a, b \in M$: $a + b \in M$

$a(x) + b(x) =$ Die Summe von 2 stetigen Funktionen vom Grad < 2

= Wieder eine stetige Funktion vom Grad < 2 $\in M$

2) $\forall a \in M, \forall \alpha \in \mathbb{R}$: $\alpha \cdot a \in M$

$\alpha\, a(x) =$ Eine stetige Funktion Grad < 2 mit einem Skalar multipliziert ist immernoch eine stetige Funktion Grad < 2.

Das Ganze mathematisch:

1) $\forall a(x), b(x) \in M$: $a(x) + b(x) \in M$

$$a(x) + b(x) = a_1 x + a_2 + b_1 x + b_2 = a_1 x + b_1 x + a_2 + b_2$$

$$= (a_1 + b_1) x + (a_2 + b_2) \in M$$

2) $\forall a(x) \in M, \forall \alpha \in \mathbb{R}$: $\alpha \cdot a(x) \in M$

$$\alpha \cdot a(x) = \alpha (a_1 x + a_2) = \alpha a_1 x + \alpha a_2 \in M$$

b) Zu zeigen für lin. Unabhängigkeit

$\sum_{i=0}^{n} f_i(x_j)\, x_j = 0$ nur für $x_j = 0$ für $j \in [0,..,n]$

da $f_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{für } i=j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$

folgt $\sum_{i=0}^{n} f_i(x_j)\, x_j = \underbrace{f_1(x_j)}_{0} x_1 + \underbrace{\dots}_{0} + \underbrace{f_j(x_j)}_{1} x_j + \underbrace{\dots}_{0} + \underbrace{f_n(x_j)}_{0} x_n$

$= x_j = 0 \iff x_j = 0$

Alternativ & vlt. etwas besser mittels Induktion:

(i) $j = 1$:

$\sum_{i=0}^{n} f_i(x_1)\, x_1 = \underbrace{f_1(x_1)}_{1}\, x_1 = 0 \iff x_1 = 0$ ✓

(ii) $k \to k+1$:

$\sum_{i=0}^{n} f_i(x_{k+1})\, x_{k+1} = \underbrace{f_k(x_{k+1})}_{0} x_k + \underbrace{f_{k+1}(x_{k+1})}_{1} x_{k+1} = 0$

$= 1\, x_{k+1} = 0 \iff x_{k+1} = 0$ ✓

6) a) True → Verträglichkeitsbedingungen

b)
$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{matrix}$$

→ True

c) False → wir wissen nichts über die Permutationen in P → ± 60

d)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ EW } 1 \qquad \begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix} \text{ EW } 2$$

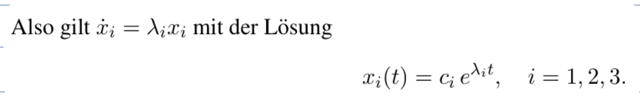
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ EW } 1 \quad \rightarrow \text{ False}$$

e)
$$\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

dim (Bild (A)) = rang (A) = 2

True

f) Lösung einer solchen Diff. Gl. ist nach den Übungen:



Also gilt $\dot{x}_i = \lambda_i x_i$ mit der Lösung

$$x_i(t) = c_i\, e^{\lambda_i t}, \quad i = 1, 2, 3.$$

$$\Rightarrow \quad x_1(t) = c_1 e^{-\lambda_1 t} \xrightarrow{t \to \infty} 0$$

$$y_1(t) = A^T x_1(t) = 0$$

⇒ true

g) $AA^T = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

EW: $\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 2$

$\sigma_1 = \sqrt{3} \quad \sigma_2 = \sqrt{2}$

$\Rightarrow$ True

h) $\underline{A}$ ist symmetrisch $\rightarrow$ Spektralsatz

$\exists\, T, D : \; A = TDT^T \quad \Rightarrow$ True

Dr. V. Gradinaru D-ITET, D-MATL, RW Winter 2017

Basisprüfung Lineare Algebra

Wichtige Hinweise

- Zweistündige Prüfung.
- Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten eigene Notizen (von Hand geschrieben). Taschenrechner sind NICHT erlaubt.
- Alle Aufgaben werden gleich gewichtet.
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen. Nicht motivierte Lösungen (ausser bei der Multiple-Choice-Aufgabe) werden nicht akzeptiert!
- Tragen Sie die Lösung der Aufgabe 6 (Multiple Choice) auf dem Extrablatt ein.

Name		Note
Vorname		
Studiengang		
Leginummer		
Prüfung	Lineare Algebra	
Datum	30.01.2017	

1	2	3	4	5	6	Punkte

- Bitte füllen Sie zuerst das Deckblatt aus.
- Legen Sie Ihre Legi auf den Tisch.
- Schalten Sie Ihr Handy aus.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite, und schreiben Sie Ihren Namen auf alle Blätter.
- Bitte nicht mit Bleistift schreiben. Auch nicht mit rot oder grün.
- Versuchen Sie Ihren Lösungsweg möglichst klar darzustellen und arbeiten Sie sorgfältig!
- **Schauen Sie das Prüfungsblatt erst an, wenn der Assistent das Signal dazu gibt!**

Viel Erfolg!

1. [6 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \\ 0 & -2 & \beta \end{bmatrix}.$$

a) Finden Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass die Spaltenvektoren von A orthogonal sind.

b) Mit den Werten α und β wie in **a)**:

1. Berechnen Sie eine QR-Zerlegung von A.
2. Berechnen Sie $|\det(A)|$.

2. [6 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren von C.

b) Bestimmen Sie eine orthonormale Eigenbasis zu C.

c) Berechnen Sie die Matrix

$$e^C = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} C^n.$$

3. [6 Punkte] Für $k \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathcal{P}^k$ den Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad $< k$. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{F} : \mathcal{P}^3 \to \mathcal{P}^3$ definiert für alle $f \in \mathcal{P}^3$ und alle $x \in \mathbb{R}$ durch

$$\begin{cases} f \mapsto \mathcal{F}(f), \\ \mathcal{F}(f)(x) = xf'(x) + \frac{1}{x}\int_0^x f(s)ds. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ eine lineare Abbildung ist.

b) Gegeben seien im Urbildraum und im Bildraum die Basis $1, x, x^2$. Durch welche Matrix A wird $\mathcal{F}$ beschrieben?

c) Gegeben seien im Urbildraum die Basis $1 - x$, $2x$, $4x^2$ und im Bildraum die Basis 2, $\frac{x}{4}$, $\frac{x^2}{3}$. Welches ist die neue Matrix B, die $\mathcal{F}$ nach dem Basiswechsel beschreibt?

4. [6 Punkte] Gegeben sei das Ausgleichsproblem: finde $x \in \mathbb{R}^2$, so dass

$$x = \arg\min_{v\in\mathbb{R}^2} \|Av - b\|_2, \tag{1}$$

wobei

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Siehe nächstes Blatt!

a) Lösen Sie (1) mithilfe einer Singulärwertzerlegung.

b) Schreiben Sie die Normalgleichungen für (1) auf und lösen Sie sie.

Hinweis: Mit der Notation “argmin” in (1) ist das Element $x \in \mathbb{R}^2$ gemeint, welches den Ausdruck $\|Ax - b\|_2$ minimiert.

5. [6 Punkte] Wir betrachten den Vektorraum

$$\mathcal{L}^2[-1,1] := \left\{ f : [-1,1] \to \mathbb{R} \middle| \int_{-1}^{1} |f(t)|^2 \, dt < \infty \right\}$$

und die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon \mathcal{L}^2[-1,1] \times \mathcal{L}^2[-1,1] \to \mathbb{R}$ definiert für alle $f, g \in \mathcal{L}^2[-1,1]$ durch

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(t) g(t) dt.$$

a) Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt über $\mathbb{R}$ definiert.

b) Wir betrachten die Funktionen $f_k(t) = \sin(\pi k t)$ für $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Vektoren $\{f_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{L}^2[-1,1]$ orthonormal bezüglich dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sind.

Hinweis: Für $a, b \in \mathbb{R}$ *gilt* $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$.

c) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\{f_k : k \in \mathbb{N}\}$ linear unabhängig sind.

d) Was ist die Dimension von $\mathcal{L}^2[-1,1]$?

Bitte wenden!

6. [6 Punkte] Multiple Choice: Auf dem Extrablatt Richtig oder Falsch ankreuzen (Bei dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antwort *nicht* begründen).

a) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Dann gilt: $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

b) Gegeben seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ so dass $Av = 0$. Dann kann das Gleichungsystem $Ax = b$ *nicht* für beliebige rechte Seite b lösbar sein.

c) Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit n Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ungleich null. Dann gilt $\det(A) \neq 0$.

d) Gegeben sei eine orthogonale Matrix A. Dann gilt $\det(A) = 1$.

e) Sei $\mathcal{P}^k$ wie in Aufgabe **3.** definiert. Die Abbildung $\mathcal{F} : \mathcal{P}^5 \to \mathcal{P}^9$ gegeben für alle $f \in \mathcal{P}^5$ und alle $x \in \mathbb{R}$ durch

$$\begin{cases} f \mapsto \mathcal{F}(f), \\ \mathcal{F}(f)(x) = \frac{d}{dx}\left(xf(x)^2\right), \end{cases}$$

ist linear.

f) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

und weiter sei U, S, V eine Singulärwertzerlegung von A, so dass $A = USV^T$. Dann gilt:

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Michael Baumgartner

Basisprüfung lineare Algebra - Winter 2017

1) a) Sieht man direkt, könnte man aber auch mittels Vektorprodukt berechnen:

$\alpha = 1 \quad \beta = 1$

b) 1) Ähnlich zur Winter 2016 Prüfungsaufgabe 1 bilden wir einfach die Orthonormalbasis von A und berechnen R mit Hilfe von Gauss-Jordan

$A = Q R$

$$Q = \text{normiertes } A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Gauss-Jordan:

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -2 & 1 \end{array}\right. \rightarrow \left.\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -2 & 1 \end{array}\right.$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 3 \end{array}\right. \rightarrow \left.\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 3 \end{array}\right.$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 3 \end{array}\right. \rightarrow \left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{3} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \quad \underline{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}}_{\underline{Q}} \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}}_{\underline{R}}$$

2) Achtung? $|\det(A)|$ ← Betrag

$$|\det(A)| = |\det(R)| = |\sqrt{36}| = \underline{\underline{6}}$$

2. a)

$$\text{EW:} \quad \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & -3 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -3 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)((2-\lambda)^2 - 9)$$

$$= (2-\lambda)^3 - 9(2-\lambda)$$

$$= (2-\lambda)^3 - 18 + 9\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 - 18 + 9\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 3\lambda - 10 \qquad | \lambda = 2$$

$$= (\lambda - 2)(-\lambda^2 + 4\lambda + 5)$$

$$= (\lambda - 2)(-\lambda + 5)(\lambda + 1)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\lambda_1 = 2}} \qquad \underline{\underline{\lambda_2 = 5}} \qquad \underline{\underline{\lambda_3 = -1}}$$

EV: $\lambda_1 = 2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \Rightarrow \quad x_3 = 0 \quad x_2 = s \quad x_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{E_2 = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}}}$$

$\lambda_2 = 5$

$$\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|} -3 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow \quad x_3 = s \qquad x_2 = 0 \qquad x_1 = -s$

$$\underline{\underline{E_5 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}}$$

$\lambda_3 = -1$

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow \quad x_3 = s \qquad x_2 = 0 \qquad x_1 = s$

$$\underline{\underline{E_{-1} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}}$$

b) Symmetrische Matrix mit alles verschiedenen EW
→ EV sind automatisch orthogonal → normieren.

Orthonormale Eigenbasis: $\underline{\underline{b^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; b^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; b^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}}$ ✓

c) $e^C = T e^D T^T \quad \Longleftrightarrow \quad C = T D T^T$

$$e^D := \begin{bmatrix} e^{d(1)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{d(2)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{d(3)} \end{bmatrix}$$

Finde also zuerst Diagonalmatrix $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$T = EV(A) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$e^C = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^5 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{e^5}{\sqrt{2}} & \frac{e^{-1}}{\sqrt{2}} \\ e^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^5}{\sqrt{2}} & \frac{e^{-1}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} \frac{e^5+e^{-1}}{2} & 0 & \frac{-e^5+e^{-1}}{2} \\ 0 & e^2 & 0 \\ \frac{-e^5+e^{-1}}{2} & 0 & \frac{e^5+e^{-1}}{2} \end{bmatrix}}}$$

3) a) 2 Kriterien: $\forall a, b \in \mathcal{P}_3$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

1) $F(a+b) = F(a) + F(b)$

2) $F(\alpha a) = \alpha F(a)$

$$F(f(x)) = x f'(x) + \frac{1}{x} \int_0^x f(s)\,ds$$

Die Abbildung ist zuerst einmal wohldefiniert, da $F(1) = 1 \in \mathcal{P}_3$, $F(x) = \frac{3}{2}x \in \mathcal{P}_3$, $F(x^2) = \frac{7}{3}x^2 \in \mathcal{P}_3$

1) & 2) kombiniert: Spart Zeit

$$F(a(x) + \alpha b(x)) = x(a(x) + \alpha b(x))' + \frac{1}{x}\left(\int_0^x (a(s) + \alpha b(s))\,ds\right)$$

$$= x a'(x) + \alpha x b'(x) + \frac{1}{x}\int_0^x a(s)\,ds + \frac{1}{x}\int_0^x \alpha b(s)\,ds$$

$$= x a'(x) + \frac{1}{x}\int_0^x a(s)\,ds + \alpha\left(x b'(x) + \frac{1}{x}\int_0^x b(s)\,ds\right)$$

$$= \underline{F(a(x)) + \alpha F(b(x))}$$

b) $1 = 1 = 1 + 0x + 0x^2$

$x = \frac{3}{2}x = 0 + \frac{3}{2}x + 0x^2$

$x^2 = 2x^2 + \frac{1}{3}x^2 = \frac{7}{3}x^2 = 0 + 0x + \frac{7}{3}x^2$

$$\underline{A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} \end{bmatrix}}$$

wenn der Koordinatenvektor wie folgt ist $\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix}$

$$1 - x = 1 - \frac{3}{2}x = \frac{1}{2}\cdot 2 - 6\frac{x}{4} + 0\frac{x^2}{3}$$

$$2x = 3x = 0\cdot 2 + 12\frac{x}{4} + 0\frac{x^2}{3}$$

$$4x^2 = \frac{28}{3}x^2 = 0\cdot 2 + 0\frac{x}{4} + 28\frac{x^2}{3}$$

$$\underline{\underline{B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -6 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 28 \end{bmatrix}}}$$

4) a) SVD:

$$A^TA = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 3 & -3 \\ 2\sqrt{2} & -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 26 & -10 \\ -10 & 26 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{bmatrix}$$

EW: $$\det \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 13 - \enclose{circle}{2\lambda} & -5 \\ -5 & 13 - \enclose{circle}{2\lambda} \end{bmatrix} = 0$$

Achtung: lässt man das $\frac{1}{2}$ ausgeklammert, so auch beim λ auskl.!

$$0 = \frac{1}{4}((13-2\lambda)^2 - 25) = (4\lambda^2 - 52\lambda + 169 - 25)$$

$$= (\lambda^2 - 13\lambda + 36)$$

$$= (\lambda - 4)(\lambda - 9)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 4 \quad \lambda_2 = 9$$

$$\underline{\sigma_1 = 3} \quad \underline{\sigma_2 = 2}$$

EV: $\lambda_1 = 4$

$$\left[\begin{array}{cc|c} \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & 0 \\ -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x_2 = s \quad x_1 = s$$

$$\Rightarrow v^{(2)'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{v^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$\lambda_2 = 9$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & 0 \\ -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x_2 = s \quad x_1 = -s$$

$$\Rightarrow v^{(1)'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{v^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{V} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} \qquad \underline{\underline{S} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

U aus V & S berechnen:

$$u^{(1)} = \frac{A v^{(1)}}{s^{(1)}} = \frac{\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}{3} = \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}{3} = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$u^{(2)} = \frac{A v^{(2)}}{s^{(2)}} = \frac{\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}{2} = \frac{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{2} = \underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$$u^{(3)} = u^{(1)} \times u^{(2)} = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \quad \Rightarrow \underline{\underline{U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow \quad S V^T c = U^T b \qquad U^T b = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$S V^T c = d$$

$$\hat{S} V^T c = d_0$$

$$S = \begin{bmatrix} \hat{S} \\ \hline 0 \end{bmatrix} \qquad d = \begin{bmatrix} d_0 \\ \hline d_1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad c = V \hat{S}^{-1} d_0$$

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \det(\hat{S}) = 6$$

$$\hat{S}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{x}}}$$

b) Normalengleichung: $A^T A \underline{x} = A^T b$

$$A^T A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{bmatrix} \qquad A^T b = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ \sqrt{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Gauss:
$$\left[\begin{array}{cc|c} 13 & -5 & 4 \\ -5 & 13 & 4 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 13 & -5 & 4 \\ 0 & 13 - \frac{25}{13} & 4 + \frac{20}{13} \end{array}\right]$$

$$\left(13 - \frac{25}{13}\right) x_2 = 4 + \frac{20}{13}$$

$$(169 - 25) x_2 = 52 + 20$$

$$144 \, x_2 = 72$$

$$\underline{\underline{x_2 = \frac{1}{2}}}$$

$$13x_1 - \frac{5}{2} = 4$$
$$26x_1 - 5 = 8$$
$$26x_1 = 13$$
$$\underline{\underline{x_1 = \frac{1}{2}}}$$

5. a) Kriterien: $\forall x,y \in L^2[-1,1]$:

(I) Linear im 2. Argument:

$$\langle x, ay+bz\rangle = a\langle x,y\rangle + b\langle x,z\rangle$$

(II) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$

(III) Positiv definit:

$$\langle x,x\rangle \geq 0,\quad \langle x,x\rangle = 0 \iff x = 0$$

(I) $\langle x(t), ay(t)+bz(t)\rangle =$

$$\int_{-1}^{1} x(t)(ay(t)+bz(t))\,dt = \int_{-1}^{1} a\,x(t)y(t) + b\,x(t)z(t)\,dt$$

$$= a\int_{-1}^{1} x(t)y(t)\,dt + b\int_{-1}^{1} x(t)z(t)\,dt = a\langle x(t),y(t)\rangle + b\langle x(t),z(t)\rangle$$ ✓

(II) $\langle x(t),y(t)\rangle = \int_{-1}^{1} x(t)y(t)\,dt = \int_{-1}^{1} y(t)x(t)\,dt = \langle y(t),x(t)\rangle$ ✓

(III) $\langle x(t),x(t)\rangle = \int_{-1}^{1} \underbrace{x(t)^2}_{\geq 0\ \forall t\in[-1,1]}\,dt$ $\Rightarrow$ Eigenschaften des bestimmten Integrales,

für eine Funktion $f(t) \geq 0\ \forall t \in [a,b]$ gilt

$\int_a^b f(t)\,dt \geq 0$ & aus der Linearität des Integrals folgt

$$\int_a^b f(t)\,dt = 0 \iff f(t) = 0\ \forall t \in [a,b]$$

falls $f(t) \geq 0$ $\Rightarrow$ daraus folgt die Behauptung!

b) Induktion: (kann argumentieren ob $0 \in \mathbb{N}$ ist oder nicht)

(i) $k=1$ & $k=2$:

$$\|f_1(t)\| = \sqrt{\langle f_1, f_1 \rangle} = \sqrt{\int_{-1}^{1} f_1(t)^2 dt}$$

$$= \sqrt{\int_{-1}^{1} \sin(\pi t)^2 dt} = \sqrt{\int_{-1}^{1} \frac{1}{2} (\underbrace{\cos(0)}_{1} - \cos(2\pi t))}$$

$$= \sqrt{\int_{-1}^{1} \frac{1}{2} dt - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \cos(2\pi t) dt}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} \sin(2\pi t) \Big|_{-1}^{1} \right)}_{0}} = \sqrt{1} = \underline{\underline{1}}$$

$$\|f_2(t)\| = \sqrt{\langle f_2, f_2 \rangle} = \sqrt{\int_{-1}^{1} f_2(t)^2 dt} = \sqrt{\int_{-1}^{1} \sin^2(2\pi t)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \underbrace{\cos(0)}_{1} - \cos(4\pi t) dt}$$

$$= \sqrt{1 - \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{4\pi} \sin(4\pi t) dt}_{0}} = \underline{\underline{1}}$$

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{-1}^{1} f_1(t) f_2(t) dt = \int_{-1}^{1} \sin(\pi t) \sin(2\pi t) dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \cos(-\pi t) - \cos(3\pi t) dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \cos(-\pi t) dt - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \cos(3\pi t) dt$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \sin(-\pi t) \Big|_{-1}^{1} - \frac{1}{6\pi} \sin(3\pi t) \Big|_{-1}^{1}$$

$$= 0 - 0 = \underline{\underline{0}}$$

✓

(ii) $n \to n+1$

$$\|f_{n+1}\| = \sqrt{\langle f_{n+1}, f_{n+1}\rangle} = \sqrt{\int_{-1}^{1} \sin^2(n\pi t + \pi t)\,dt}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \underbrace{\cos(0)}_{1} - \cos(2n\pi t + 2\pi t)\,dt}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \cos((n+1)2\pi t)\,dt}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{2}\,\frac{1}{(n+1)2\pi}\,\underbrace{\sin((n+1)2\pi t)dt}_{0}} = \sqrt{1} = \underline{\underline{1}}$$

$$\langle f_n, f_{n+1}\rangle = \int_{-1}^{1} \sin(n\pi t)\sin(n\pi t + \pi t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \cos(2n\pi t + \pi t) - \cos(\pi t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{2n\pi + \pi}\,\underbrace{\sin(\underbrace{2n\pi t + \pi t}_{(2n+1)\pi t})\Big|_{-1}^{1}}_{0} - \underbrace{\frac{1}{2\pi}\sin(\pi t)\Big|_{-1}^{1}}_{0}$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

✓

c) Haben in b) gerade gezeigt, dass alle Vektoren $f_k : k \in \mathbb{N}$ orthonormal zueinander stehen ⇒ sie sind linear unabhängig.

Unsicher, ob diese Argumentation an der Prüfung ausreicht?

Trotzdem Beweis:

Müssen zeigen, dass

$$\sum_{k=1}^{n} f_k x_k = 0 \iff x = 0$$

$$f_1 x_1 + \dots + f_k x_k + \dots + f_n x_n = 0$$

$\langle f_k, \cdot \rangle |$

$$\langle f_k, f_1 x_1 + \dots + f_k x_k + \dots + f_n x_n \rangle = 0$$

$$\downarrow \text{ linear im 2. Glied}$$

$$\underbrace{\langle f_k, f_1\rangle}_{0} x_1 + \underbrace{\dots}_{0} + \underbrace{\langle f_k, f_k\rangle}_{1} x_k + \dots + \underbrace{\langle f_k, f_n\rangle}_{0} x_n = 0$$

$$x_k = 0$$

Multipliziere konsekutiv von links skalar mit f_i, $i \in [1, \dots, n]$

$\Rightarrow$ $x_1, \dots, x_k, \dots, x_n = 0$ $\Leftrightarrow$ alle Vektoren linear unabhängig.

d) Der Vektorraum ist unendlichdimensional, wir können alleine schon unendlich viele lin. unabh. Vektoren wie in dieser Aufgabe konstruieren.

6.a) false (vgl. in MatLab)

b) true HLGS hat nicht triviale Lösung
$\Leftrightarrow$ LGS hat entweder keine oder ∞ Lösungen

c) true $\Rightarrow$ A ist diagonalisierbar, A und D sind ähnlich $\Rightarrow \det(A) = \det(D) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$ $\neq 0$

d) false $\Rightarrow$ $|\det(A)| = 1$ $\Rightarrow$ $\det(A) = \pm 1$

e) **false** hat ein Quadrat drin

$\rightarrow f(a+b) \neq f(a) + f(b)$

f) $A^T A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

EW: $\lambda_1 = 3$ $\lambda_2 = 2$

$\sigma_1 = \sqrt{3}$ $\sigma_2 = \sqrt{2}$

$\Rightarrow$ **false**

Prüfungsvorbereitungstipps:

Allgemein:

- Bildet Lerngruppen
- Fertigt gemeinsame Lösungen an
- Teilt die Arbeit
- Löst unbedingt alte Prüfungen

Wahrscheinlich der wichtigste Tipp. Die Serien sind wichtig während dem Semester, um gelerntes anzuwenden. Aber im Hinblick auf die Prüfung muss man auch prüfungsnah lernen? Schlussendlich wird nicht totes (nicht-angewandtes) Wissen abgefragt, sondern spezifisch angewandtes.

⇝ Könnt so dem Zeitstress entgehen?

LinAlg spezifisch:

- Löst die Multiple-choice noch einmal

Geben meist 1/6 der Punkte an der Prüfung, und zeigen euch, wie gut ihr die Theorie beherrscht.

⇝ Am Ende von Zardinis Skript hat es noch eine Zusammenstellung?

- Rechenbeispiele im Skript nachrechnen

Vor allem als Repetition zum Einsteigen sehr hilfreich.